



DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl. No. B23

168N34.2

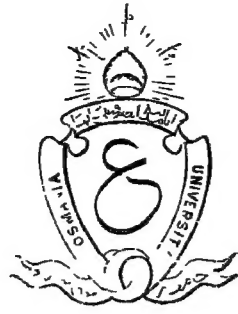
Ac. No. 21636

Date of release for loan

This book should be returned on or before the date last stamped below. An overdue charge of one anna will be charged for each day the book is kept overtime

---





نصاب سلسلہ درجہ اولیٰ جامعہ عثمانیہ

# مساواتوں کا نظریہ

جلد دوم

تصنیف

ڈبلیو۔ یس۔ برنسائڈ ایم۔ اے ڈی۔ ایس۔ سی

اے۔ ڈبلیو۔ پیانٹن ایم۔ اے ڈی۔ ایس۔ سی

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن دارالترجیمہ جامعہ عثمانیہ سرکار عالی

۱۳۵۵ھ ۱۳۴۵ھ ۱۹۲۶ء

طبع جامعہ عثمانیہ سرکار عالی





# فہرست سامین

مساواتوں کا نظریہ

جلد دوم

## تیرہواں باب

### مقطعات

صفحہ	مضمون	صفحہ
۱	تعریفات -	۱۲۷
۵	علامتوں سے متعلق قاعدہ -	۱۲۸
۱۱	مقطعات کے ابتدائی 'مسئلے' مسائل آتا ہے -	۱۲۹ تا ۱۳۷
۱۷	صغیر مقطعات، 'تعریفات' -	۱۳۳
۱۸	مقطعات کا پھیلاؤ -	۱۳۴
۲۵	مقطع کو پھیلائے کا لاپلاس کا طریقہ -	۱۳۵
۲۹	مقطع کا پھیلاؤ صدر عناصر کے حاصل ضربوں میں -	۱۳۶
	مقطع کا پھیلاؤ ایک صف اور ایک ستون کے عناصر کے زوجوں کے	۱۳۷

صفحہ	مضمون	صفحہ
۳۲	حاصل ضربوں میں۔	
۳۴	مقطعات کی جمع، مسئلہ ۵۔	۱۳۸
۳۶	مزید سیلے، مسئلہ ۶ اور مسئلہ ۷۔	۱۳۹، ۱۴۰
۴۴	مقطعات کی ضرب، مسئلہ ۸۔	۱۴۱
۴۶	مسئلہ ۸ کا دوسرا ثبوت۔	۱۴۲
۵۲	مستطیلی آراستے۔	۱۴۳
۵۸	خطی مساداتوں کے نظام کا حل۔	۱۴۴
۶۲	خطی متجانس مساداتیں۔	۱۴۵
۶۴	شکافی مقطعات۔	۱۴۶
۶۷	متشاکل مقطعات۔	۱۴۷
۷۱	معوج متشاکل اور معوج مقطعات۔	۱۴۸
	دہا مسئلہ جو اس مقطع سے متعلق ہے جس کا صدر	۱۴۹
۷۷	پہلا صغیر معدوم ہوتا ہے۔	
۸۰	متفرق متشاکلین۔	
<h2>چودھواں باب</h2>		
<h3>اسقاط</h3>		
۱۱۲	تعریفات۔	۱۵۰
۱۱۴	متشاکل تنافعوں کی مدد سے اسقاط۔	۱۵۱
۱۱۵	حاصل اسقاط کی خاصیتیں۔	۱۵۲
۱۱۸	یولر کا اسقاط کا طریقہ۔	۱۵۳
۱۲۰	سلوسٹر کا اسقاط کا طریقہ۔	۱۵۴

صفحہ	مضمون	دفعہ
۱۲۲	بیزو کا اسقاط کا طریقہ -	۱۵۵
۱۲۹	اسقاط کے دوسرے طریقے -	۱۵۶
۱۳۲	میمیز -	۱۵۷
۱۳۶	دو مساداتوں کی مشترک اصل کی تعیین -	۱۵۸
۱۳۹	امثلہ -	

## پندرہواں باب

### متشاكل تفاعلوں کو محسوب کرنا نیم غیر متغیر اور نیم ہم متغیر

۱۴۵	س اور ب کے لیے ویزنگ کے عام جملے -	۱۵۹
۱۴۷	دو مساداتوں کی اصلوں کے متشاكل تفاعل -	۱۶۰
۱۴۸	اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں سے محسوب کرنا -	۱۶۱
۱۵۲	کعبی کی اصلوں کے فرقوں کے تفاعل -	۱۶۲
۱۵۵	چار درجہ کی اصلوں کے فرقوں کے تفاعل -	۱۶۳
۱۵۷	نیم غیر متغیر اور نیم ہم متغیر -	۱۶۴
۱۶۱	نیم غیر متغیروں کی تعیین -	۱۶۵
۱۶۸	مثالیں -	

## سولہواں باب

### نیم متغیر اور غیر متغیر تعریفات -

۱۷۹		۱۶۶
-----	--	-----

صفحہ	مضمون	دفعہ
۱۸۰	ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی ساخت -	۱۶۷
۱۸۳	ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے خواص -	۱۶۸
۱۸۷	عامل عطف کے ذریعہ ہم متغیروں کی ساخت -	۱۶۹
۱۹۰	ہم متغیروں اور نیم ہم متغیروں سے متعلق مسئلہ -	۱۷۰
۱۹۱	دوہرے خطی استحالہ کا استعمال ہم متغیروں کے نظریہ پر -	۱۷۱
۱۹۶	خطی استحالہ سے اخذ شدہ ہم متغیروں کے خواص -	۱۷۲
۲۰۱	وہ مسئلے جو کثیر رقمیوں کے نیم متغیروں اور ہم متغیروں سے متعلق ہیں -	۱۷۳
۲۰۱	تفرقی علامتوں کے ذریعہ غیر متغیروں اور ہم متغیروں کو اخذ کرنا -	۱۷۷
۲۱۰	آرہنولڈ اور کلبش کی ترقیم -	۱۷۸
۲۱۳	مثالیں -	
۲۱۵		

## سترہواں باب

### دو درجی، تین درجی اور چار درجی کے ہم متغیر اور غیر متغیر

۲۲۴	دو درجی -	۱۷۹
۲۲۵	تین درجی اور اس کے ہم متغیر -	۱۸۰
۲۳۰	کبھی کے غیر متغیروں اور ہم متغیروں کی تعداد -	۱۸۱
۲۳۱	چار درجی، اس کے ہم متغیر اور غیر متغیر -	۱۸۲
۲۳۳	چھ درجی ہم متغیر کے دو درجی اجزاء کے ضربی -	۱۸۳

صفحہ	مضمون	دفعہ
۲۳۵	چھ درجی ہم متغیر کے دو درجی اجزائے ضربی کی رقوم میں عیسوی کو بیان کرنا۔	۱۸۴ -
۲۳۶	خود چار درجی کو چھ درجی ہم متغیر کے دو درجی اجزائے ضربی کی رقوم میں بیان کرنا۔	۱۸۵ -
۲۳۸	چار درجی کی تحلیل۔	۱۸۶ -
۲۴۲	ک ۶ - لہ ۵ کے غیر متغیر اور ہم متغیر۔	۱۸۷ -
۲۴۵	چار درجی کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی تعداد۔	۱۸۸ -
۲۴۷	مثالیں۔	

## اٹھارواں باب

### مجموع شکلوں کے ہم متغیر اور غیر متغیر

۲۵۴	مجموع شکلیں۔	۱۸۹ -
۲۵۵	دو دو درجی۔	۱۹۰ -
۲۵۷	دو درجی اور کعبی۔	۱۹۱ -
۲۵۹	دو کعبی۔	۱۹۲ -
۲۶۲	اجتماعی۔	۱۹۳ -
۲۶۳	مثالیں	

صفحہ

مضمون

صفحہ

# اُنیسواں باب

## استحالات

### فصل (۱)۔ چرن ہاوزن کا استحالہ

۱۹۴	مسئلہ۔	۲۷۵
۱۹۵	استحالہ شدہ مساوات کی ساخت۔	۲۷۹
۱۹۶	استحالہ شدہ مساوات کو بنائیکا دوسرا طریقہ۔	۲۸۰
۱۹۷	کبھی پرچرن ہاوزن کے استحالہ کا استعمال۔	۲۸۱
۱۹۸	چار درجہ پرچرن ہاوزن کے استحالہ کا استعمال۔	۲۸۳
۱۹۹	چرن ہاوزن کے استحالہ سے کبھی کو شنائی شکل میں تحویل کرنا۔	۲۸۵
۲۰۰	چرن ہاوزن کے استحالہ سے چار درجہ کو سہ رقی شکل میں تحویل کرنا۔	۲۸۶
۲۰۱	نویں درجہ کی مساوات سے دوسری، تیسری، چوتھی رقیوں کا جدا کرنا۔	۲۸۷

### فصل (۲)۔ ہرمنٹ اور سلوسٹر کے مسئلے

۲۰۲	دوسرے درجہ کے متجاش تفاعل کو مربعوں کے مجموعہ طور پر بیان کرنا۔	۲۹۱
۲۰۳	ہرمنٹ کا مسئلہ۔	۲۹۵
۲۰۴	وہ مسئلہ جو اسٹرم کے باقیوں سے متعلق ہے۔	۳۰۱

صفحہ	مضمون	دفعہ
۳۰۷	اسٹرم کے تفاعلوں کے لیے سلوسٹر کی شکلیں۔	۲۰۵

## فصل (۳)۔ متفرق مسائل

۳۱۱	پانچ درجہ کی کوئٹین، پانچویں قوتوں کے مجموعہ میں تحویل کرنا۔	۲۰۶
۳۱۵	چار درجہ اور کبھی جو ایک دوسرے میں مستحیل ہو سکتے ہیں۔	۲۰۷
۳۱۹	کسی کثیر درجہ کے مطلق غیر متغیروں کی تعداد۔	۲۰۸
۳۲۱	کثیر درجہ کے نیم متغیروں کی تعداد۔	۲۰۹
۳۲۳	ہر میٹ کا قانون متکافیت	۲۱۰
۳۲۶	مشکافی اور قائم خطی استحالہ۔ ضد متغیر۔	۲۱۱
۳۳۴	متفرق مثالیں۔	

## فصل (۴)۔ ہندسی استحالات

۳۵۴	ثنائی شکلوں کا ثلاثی شکلوں میں استحالہ۔	۲۱۲
۳۵۷	دو درجہ اور دو درجیوں کے نظام۔	۲۱۳
۳۵۹	چار درجہ اور اس کے ہم متغیروں پر ہندسی طریقہ سے بحث۔	۲۱۴
۳۶۲	ثلاثی نظام میں عام استحالات۔	۲۱۵
۳۶۸	یگانہ ثلاثی شکل کی تعیین۔	۲۱۶
۳۷۵	چار درجہ اور دو درجہ کا مخلوط نظام۔	۲۱۷
۳۸۰	چھ درجہ کے صدر ہم رو۔	۲۱۸



صفحہ  
۳۸۴  
۳۸۵

مضمون  
جیکوبی کی ہندسی تعبیر -  
مثالیں -  
۲۱۹ -

## پیسواں باب

ابدالات اور گروہوں کا نظریہ

فصل اول - ابدالات بالعموم

- |     |                                 |       |
|-----|---------------------------------|-------|
| ۳۹۸ | تعاریفات - ترقیم -              | ۲۲۰ - |
| ۳۹۹ | دائری ابدالات -                 | ۲۲۱ - |
| ۴۰۲ | ابدالوں کے حاصل ضرب اور قوتیں - | ۲۲۲ - |
| ۴۱۰ | مثالیہ ابدالات -                | ۲۲۳ - |

فصل دوم - کثیر قیمتی تفاعل اور گروہ

- |     |   |       |
|-----|---|-------|
| ۴۱۲ | گروہ کی تعریف - متشاکل گروہ                           | ۲۲۴ - |
| ۴۱۴ | متبادلہ گروہ -  | ۲۲۵ - |
| ۴۱۶ | کثیر قیمتی تفاعلوں کی مزدوج قیمتیں اور مزدوج گروہ -   | ۲۲۶ - |
| ۴۲۳ | مثالیں -  |       |
| ۴۲۹ | دئے ہوئے گروہ کے تفاعلوں کو بنانا - گیا لواتفال -     | ۲۲۷ - |
| ۴۳۳ | مسئلہ -   | ۲۲۸ - |
| ۴۳۵ | مسئلہ جو ایک ہی گروہ کے دو تفاعلوں کو مربوط کرتا ہے - | ۲۲۹ - |
| ۴۳۷ | مسئلہ کی توسیع اور نتائج مرتب -                       | ۲۳۰ - |

صفحہ	مضمون	صفحہ
۴۴۱	دو قیمتی تفاعل - مسئلہ -	۲۳۱
۴۴۳	مسئلہ جو متبادل تفاعل سے متعلق ہے -	۲۳۲
۴۴۴	مسئلہ جو کثیر قیمتی تفاعلوں کی قوتوں سے متعلق ہے -	۲۳۳
	<b>فصل سوم - گیا لوا کا محلل</b>	
۴۴۸	گیا لوا کا محلل - مساوات کا گروہ -	۲۳۴
۴۵۵	مثالیں -	
	<b>فصل چہارم - مساواتوں کا جبری حل</b>	
۴۶۵	مساواتوں کے جبری حل پر نظریہ ابدالات کا اطلاق -	۲۳۵
۴۶۸	منطق احاطہ کی تعریف -	۲۳۶
۴۶۹	جبری طور پر حل پذیر مساواتوں کی اصلوں کی شکل -	۲۳۷
۴۷۳	آبل کا مسئلہ -	۲۳۸
۴۷۴	اصلوں کی شکل (مسل) -	۲۳۹
۴۷۸	جبری مساواتوں پر اطلاق -	۲۴۰
۴۸۴	بنیادی مسئلہ -	
	مساواتیں جن کی قوت چار سے اعلیٰ ہو	
۴۸۵	ناقابل حل ہوتی ہیں -	
	<b>فصل پنجم - آبل کی مساواتیں</b>	
	آبل کی مساواتوں کی تعریف - گیا لوا کا محلل	۲۴۱
۴۸۷	آبل کی ایک مساوات ہے -	
۴۸۹	آبل کی عام مساوات کا حل -	۲۴۲

صفحہ	مضمون	دفعہ
۴۹۱	ایک خاص آہل کی مساوات کا حل۔	۲۴۳
۴۹۲	آہل کی مساوات کو حل کرنے کا دوسرا طریقہ	۲۴۴
۴۹۴	جیکہ مساوات کی تمام اصلوں سے ایک گروہ بنے۔	۲۴۵
۴۹۷	مفرد قوت والی ثنائی مساوات کا حل۔	۲۴۶
	اگرنا تبدیل پذیر مساوات کی ایک اصل دوسری	
	اصل کا منطق تفاعل ہو تو دی ہوئی مساوات	
۵۰۴	آہل کی مساوات ہوگی۔	
۵۱۱	نوٹ (ا)۔	
۵۱۳	نوٹ (ب)۔	
۵۱۵	نوٹ (ج)۔	
۵۱۸	نوٹ (د)۔	
۵۲۱	نوٹ (ع)۔	
۵۲۳	اشاریہ۔	

۷۸۶  
۹۲

# ساداتوں کا نظریہ

جلد دوم

## تیرہواں باب

مقطعات

(۱)

۱۲۷۔ تعریفات - اس باب میں تقاضوں کی ایک اہم جماعت بحث کی جائیگی جو اکثر تحلیل میں پیش آیا کرتے ہیں۔ یہ تفاعل اہم خواص رکھتے ہیں جن کے علم سے نظری اور عملی ریاضیات دونوں کے بہت سے حسابوں میں بڑی آسانی پیدا کی جاسکتی ہے۔

چار مقداروں

۱، ۲، ۳، ۴

کاتفاعل ۱، ۲، ۳، ۴ اس طور پر حاصل ہوتا ہے:- ۱ اور ۲ کو حروفی ترتیب میں لکھ کر اعداد ۱ اور ۲ کی دو ترتیبوں کے جواب میں ان حروفوں کو لاکھتے ۱، ۲ اور ۳، ۴ لگا دو اور اس طور پر بنے ہوئے دونوں حاصل ضربوں کو جمع کر دو۔

اسی طرح نو مقداروں



پہلے مقطع کو  $\Delta$  سے تعبیر کرو اور اسکی صفوں کو علی الترتیب  
ا، ب، ج سے ضرب دو تو

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

اب اسکو ا، ب، ج سے تقسیم کرو تو نتیجہ نکل آئیگا۔  
۵۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

۶۔ ثابت کرو

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

دوسرے صف کی تمام علامتیں بدلو اور پھر تیسرے ستون کی۔  
۷۔ ثابت کرو

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

پہلے مقطع کے ستونوں کو علی الترتیب ا، ب، ج سے ضرب دو اور پھر پہلی صف کو ا، ب، ج سے تقسیم کرو۔  
یہ ظاہر ہے کہ اسی طرح کے عمل سے کسی مقطع کو اپنے مقطع میں  
تحویل کیا جاسکتا ہے جس میں کسی خاص صف یا ستون کے عناصر  
اکائیاں ہوں۔



پہلے مقطع کو  $\Delta$  سے تعبیر کرو اور اسکی صفوں کو علی الترتیب  
 ا، ب، ج سے ضرب دو تو

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array}$$

اب اسکو ا، ب، ج سے تقسیم کرو تو نتیجہ نکل آئے گا۔  
 ۵۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array}$$

۶۔ ثابت کرو

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array}$$

دوسرے صف کی تمام علامتیں بدلو اور پھر تیسرے ستون کی۔  
 ۷۔ ثابت کرو

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array}$$

پہلے مقطع کے ستونوں کو علی الترتیب ۱، ۲، ۳ سے ضرب دو اور پھر پہلی صف کو ۱، ۲، ۳ سے تقسیم کرو۔  
 یہ ظاہر ہے کہ اسی طرح کے عمل سے کسی مقطع کو ایسے مقطع میں  
 تبدیل کیا جاسکتا ہے جس میں کسی خاص صف یا ستون کے عناصر  
 اکائیاں ہوں۔



(ii) ۸۔ مقطع ذیل کو ایسے مقطع میں تحویل کرو جس میں پہلی صف کے عناصر کا کیاں ہوں:-

۱۰	۵	۲	۴
۲	۶	۱	۱
۵	۰	۳	۷
۸	۵	۲	-

پہلی چونکہ ۴، ۲، ۵، ۱ کا دواضماں اقل ۲۰ ہے  
 ستونوں کو ترتیب وار ۵، ۱، ۴، ۲ سے ضرب دینا کافی ہے۔ چنانچہ  
 جس میں طور پر حاصل ہوتا ہے

۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
۶	۲۴	۱۰	۵
۱۰	-	۳۰	۳۵
۱۶	۳۰	۳۰	-

”اب پہلی صف سے جزو ضرفی ۲۰، تیسری صف سے ۵“  
 اور چوتھی صف سے ۴ نکالتے سے یہ بالا خرہ میں حاصل ہوتا ہے

۱۱	۱۱	۱۱	۱۱
۶	۲۴	۱۰	۵
۳	-	۶	۷
۴	۵	۵	-

۹۔ ثابت کرو

۱۱	۱۱	۱۱
۶	۲۴	۱۰
۳	-	۶
۴	۵	۵

اگر یہ ”۶“ کے ساتھ ہو تو وہ ستون نکال دیا جائے اس لئے  
 مقطع میں (۱۱-۱۱) ایک جزو ضرفی ہو گیا ہے۔ اسی طرح (۱۱-۱۱)

اور (عہ - پ) بھی اجزائے ضربی ہونے چاہئیں۔ پس ان تین فرقوں کا حاصل ضرب مقطع کی قیمت سے صرف اس طور پر مختلف ہو سکتا ہے کہ اسکا ایک جزو ضربی عددی ہو کیونکہ دونوں تفاعل 'عہ' بہ 'جہ' میں تیسرے درجہ کے ہیں۔ رقم بہ جہ کا مقابلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ جزو ضربی ہے۔

۱۰۔ اسی طرح متماثلہ ذیل ثابت کرو:-

	۱	۱	۱	۱
عہ	جہ	بہ	ضہ	۱
عہ	جہ	بہ	ضہ	۲
عہ	جہ	بہ	ضہ	۳

یہ ظاہر ہے کہ عام صورت میں اسی طرح کے ثبوت سے ن مقدار عہ بہ 'جہ'، لہ کا اس نمونہ کا مقطع قیمت میں '۱' ن (ن - ۱) فرقوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے جو ان مقداروں سے بن سکتے ہیں۔

۱۳۳۔ صغیر مقطعات - تعریفات - جب کسی مقطع سے (12)

صفوں کی کوئی تعداد اور ستونوں کی اتنی ہی تعداد نکال لیجاتی ہے تو وہ مقطع جو باقی عناصر سے (نلو اضافی مقامات پر بحال رکھ کر) بنایا جاتا ہے صغیر مقطع کہلاتا ہے۔

اگر ایک صف اور ایک ستون نکال لئے جائیں تو اس کے جواب میں جو صغیر مقطع حاصل ہوگا اس کو ہم پہلا صغیر کہینگے۔ اگر دو صف اور دو ستون نکالے جائیں تو ایسے صغیر مقطع کو ہم دوسرے صغیر کہینگے اور و قس علی ہذا۔ نکالی ہوئی صفوں اور ستونوں میں چند مشترک عناصر ہوتے ہیں جن سے ایک مقطع بنتا ہے ان کو نکال لینے سے جو صغیر مقطع باقی رہ جاتا ہے اسکو ہم اس مقطع کا ختم کہینگے۔ چنانچہ

اُس صغیر مقطع کو جو صدرِ عنصر کا تکمیلی ہے صدرِ پہلا صغیر کہتے ہیں اور پھر اس کا صدرِ پہلا صغیر ابتدائی مقطع کا صدرِ دو ستر صغیر

ہے۔ مقطع کو عموماً ہم ۵ سے تعبیر کریں گے۔ ۵ سے وہ پہلا  
صغیر تعبیر ہو گا جو ۵ میں سے وہ صف اور وہ ستون نکالنے سے  
بنتا ہے جنہیں عنصر شامل ہے۔ ۵ سے وہ دوسرا صغیر  
تعبیر ہو گا جو ان دو صفوں اور دو ستونوں کو نکالنے سے پیدا ہوتا ہے  
جنہیں ۵ اور ۵ شامل ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ چنانچہ ۵ سے صدر  
پہلا صغیر اور ۵ سے صدر دوسرا صغیر تعبیر ہو گئے ہیں۔

مقطع ۷ کو جو عناصر د، ب، ج، و غیرہ سے بنتا ہے اختصاً  
کی خاطر صدر رقم کو خطوط وحدانی میں رکھ کر اکثر تعبیر کیا جائیگا مثلاً

$$\Delta \equiv (\text{م ب ج د ... ل ن})$$

۵ کو تعبیر کرنے میں ترقیم  $\pm = \text{م}$  بد جم ... ل ن بھی استعمال کی جائیگی جبکہ مطلب یہ ہے کہ ن لاقوں سے جتنی ترتیبیں مل سکتی ہیں ان کو لیکر ارقام (انکو صحیح علامتیں لگا کر) بنائی جائیں تو انکا مجموعہ اس ترتیم سے تعبیر ہوتا ہے۔

۱۳۲۔ مقطعات کا پھیلاؤ۔ کسی مقطع کی ہر رقم میں چونکہ ہر صف میں سے اور ہر ستون میں سے ایک اور صرف ایک عنصر شال ہوتا ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  $\Delta$  کسی ایک صف یا کسی

ایک ستون کے عناصر کا ایک خطی اور متجانس تفاعل ہے۔

اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

(13)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \dots$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \dots$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \dots$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \dots$$

دفعہ ۱۲۸ مثال ۳ پر غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ جو قہم  
رتبہ کا جو مقطع وہاں پھیلا کر لکھا گیا ہے وہ ذیل میں درج کردہ طریقہ سے  
بتا ہے :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \dots$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \dots$$

اب ہم یہ بتائینگے کہ عام صورت میں  $\Delta$  کو شکل

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \dots$$

میں لکھنے سے سر 'ا'، 'ب'، 'ج' وغیرہ 'ن'۔ رتبہ کے مقطعات ہیں۔

لاحقوں '۱'، '۲'، '۳'، .... 'ن' کی تمام ترتیبیں معلوم کرنے میں

پہلے فرض کرو کہ اس در مقام پر رہتا ہے جیسا کہ تذکرہ بالا مثال میں  
کیا گیا ہے۔ تب ہمیں  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$  نہیں ملتی جی نہیں  
اور جزو ضربی کے طور پر مثال ہوگا اور اس لئے

$$1! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = 1! \times 2! \times 3! \times \dots \times n!$$

اور یہ قطع وہ سفیر ہے جو عنصر  $1$  کے جواب میں حاصل ہوتا ہے۔ یعنی

$1! = 1$  کی قیمت معلوم کرنے میں ہم  $1$  کو صفوں کے ایک ہتھار

سے صدر مقام پر لاتے ہیں۔ اس سے  $1$  کی علامت بدل جاتی  
ہے اور اسلئے ہمیں حاصل ہوتا ہے  $1! = -1$  یعنی  $1! = -1$

اس سفیر کے جو یہ تبدیل مذمت  $1$  کے جواب میں ہے۔  
پھر دو ہتھار لائے  $2! = 2 \times 1! = 2 \times (-1) = -2$

اور علی ہذا۔

پس ہم عام صورت میں یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ

$$1! = 1, 2! = -2, 3! = 6, 4! = -24, \dots$$

اسی طرح ہم  $1! \times 2! \times 3! \times \dots \times n!$  کو کسی دوسرے ستون یا کسی صف کے

عناصر کی رقوم میں پھیلا سکتے ہیں۔ مثلاً

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 + \dots$$

اگر ہم اس صغیر کی ٹھیک علامت معلوم کرنا چاہیں جو مقطع کے کسی جزو ترکیبی سے ساتھ مقطع کے پھیلاؤ میں ضرب کھاتا ہے تو ہمیں صرف یہ غور کرنا ہو گا کہ کتنے ہٹاؤں سے یہ جزو ترکیبی صدر مقام پر آجائیگا۔ مثلاً فرض کرو کہ مقطع  $(\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 + \dots)$  کو جو تھے ستون کی رقوم میں پھیلا یا گیا ہے اور یہ معلوم کرنا ہے کہ  $\Delta_2$  کو کونسی علامت لگانی چاہئے۔ یہاں اوپر وار دو ہٹاؤں

اور بعد میں دائیں جانب تین ہٹاؤں سے صدر مقام پر آجائیگا۔ پس مطلوبہ علامت منفی ہے۔ اس قاعدے کو سادہ طور پر یوں بیان کیا جاسکتا ہے۔  $\Delta_1$  سے نکل کر پہلی صف پر زیر بحث جزو ترکیبی تک چلو اور پھر اس ستون سے نیچے آؤ۔ جب ہمیں یہ جزو ترکیبی ہے تو اس جزو پر پہنچنے سے پہلے جتنے حروف پر سے گزرنا پڑیگا انکی تعداد سے صغیر کی علامت کا تصفیہ ہو گا۔ مثلاً اگر بالا مثال میں ہم  $\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 + \dots$  کے پانچ شمار کرنے ہیں اور یہ عدد طاق ہونے کی وجہ سے مطلوبہ علامت منفی لیتے ہیں۔

مقطع کے پھیلاؤ کے لئے تذکرہ صدر دونوں ترقیموں کو برقرار رکھنا سہولت کا باعث ہو گا مقطع کو صغائر کی رقوم میں ان کو

باری باری سے مثبت اور منفی علامتیں لگا کر پھیلا نا اس وقت مفید ہے جبکہ مقطع کی قیمت کو نیچے درجہ کے مقطعوں میں متواتر جوڑ کر کے محسوب کرنا مطلوب ہو۔ لیکن بعض دیگر مقاصد کے لئے جیسا کہ دفاسات اینڈ میں معلوم ہو گا قبل الذکر فرق کا استعمال کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے جس میں علامتیں سب کی سب مثبت ہوتی ہیں (خواہ کوئی صف یا متون زیر بحث ہو) اور کسی جزوی کمی کا سر دیا کر کے ساتھ ساتھ (نیز و ضربی) متناظر سے حرف سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس بڑے حرف کی بجائے متناظر صغیر مقطع اسکی ٹھیک علامت کے ساتھ مندرج کیا جائے جس کو معلوم کرنے کا طریقہ اوپر بیان کر دیا گیا ہے) تو بعد الذکر ترتیم قبل الذکر میں بدل جاتی ہے۔

## مثالیں

(15)

$$1- \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \end{array}$$

(دفعہ ۱۲، (۲) کے ساتھ مقابلہ کرو)

$$2- \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ف} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ف} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ف} \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ف} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ف} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ف} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ف} \\ \hline \end{array}$$

۳۔ جو تھے رتبہ کے مقطع کو چوتھی صف کے عناصر کی رقوم میں

$$\text{پھیلاؤ} - \Delta = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

جب تیسرے رتبہ کے مقطعات کو پھیلا یا جاتا ہے تو دفعہ ۸۲۸ مثال

۳ کا جملہ حاصل ہو گا۔ طالب علم اسکی تصدیق آسانی کے ساتھ کر سکتا ہے۔

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (24-2)5 + (12-16)4 - (3-28)3 =$$

۵۔ منقطع ذیل کی قیمت معلوم کرو:-

$$\begin{vmatrix} 20 & 2 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 11 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \Delta$$

تیسری صف کی رقوم میں پھیلانے سے چونکہ اس میں دو عناصر سقر ہیں ہم بغیر وقت کے حاصل کرتے ہیں

$$\begin{vmatrix} 20 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 20 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

اور تیسرے رتبہ کے ان دو مقطعوں کو پھیلانے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ  $\Delta = 2188$

۶۔ پھیلاؤ





۹۔ مندرجہ ذیل متماثلہ ثابت کرو اور مقطعوں کو پھیلاؤ:-

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

جواب:- لا + ما + می - ۲ ما می - ۲ می لا - ۲ لا ما

۱۰۔ ذیل کے مقطع کی قیمت معلوم کرو:-

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv \Delta$$

اول آخری صف یا آخری ستون کی رقوم میں پھیلاؤ اور پھر ہر تیسرے رتبہ کے مقطع کو 'لہ'، 'مہ'، 'نہ' کی رقوم میں پھیلاؤ۔

جواب:-  $\Delta = (ب ج - ف ل) + (ج د - گ ل) + (د ہ - گ م)$

$$+ (ا ب - ہ ل) + (ب ج - ہ ل) + (ج د - ہ ل) + (د ہ - ہ ل) + (ا ب - ہ ل) + (ب ج - ہ ل) + (ج د - ہ ل) + (د ہ - ہ ل)$$

۱۳۵۔ مقطع کو پھیلا نیکا لاپلاس کا طریقہ - دفعہ گذشتہ میں جس (۱۷)

پھیلاؤ کی تشریح کی گئی وہ لاپلاس کے بیان کردہ پھیلاؤ میں شامل ہے۔ یہ پھیلاؤ زیادہ عام طریقہ ہے۔ اس میں مقطع کو کسی خط کے اجزائے ترکیبی کے خطی تفاعل کے طور پر پھیلائے کی بجائے ہم اس کو صغیروں کے خطی تفاعل کے طور پر جس میں خطوں کی کوئی تعداد شامل ہو سکتی ہے پھیلاتے ہیں۔

مثلاً کسی مقطع کے پہلے دو ستونوں (ا، ب) پر غور کرو اور  
 اور فرض کرو کہ ان دو ستونوں کی کسی دو صفوں کو لینے سے دوسرے  
 رتبہ (۱-۱) کے جتنے مقطعات بن سکتے ہیں بنائے گئے ہیں۔  
 فرض کرو کہ ا، ب اور ب، ق خطوط کو دیا دینے سے (یعنی خارج تصور  
 کرنے سے) جو مقطع بنائے وہ ب، ق سے تعبیر ہوتا ہے۔ اب  
 مقطع کو شکل ۳ ± (۱-۱) میں پھیلا یا جاسکتا ہے  
 جس میں ہر رقم دو متمم مقطعوں کا حاصل ضرب ہے (دیکھو دفعہ ۳۳)  
 اسکو ثابت کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ مقطع کی ہر رقم میں ستون ا سے  
 ایک عنصر اور ستون ب سے ایک عنصر شامل ہونا چاہئے۔ فرض کرو کہ  
 ایک رقم میں جزو ضربی ا، ب شامل ہوتا ہے۔ تب (ف اور  
 ق کو باہم بدلنے سے) ایک دوسری رقم بھی ہونی چاہئے جو اوپر کی  
 رقم سے صرف علامت میں مختلف ہو اور اس کے لاحقے آپس میں  
 بدلے ہوئے ہوں۔ پس مقطع کو شکل ۳ ± (۱-۱) میں  
 پھیلا سکتے ہیں جہاں ا، ب، ق، ع، ح، ز، ح، سب رقموں کا مجموعہ ہے جو  
 حروف ج، د، ع، و غیرہ کے (ن-۲) لاحقوں کو ہر ممکن طریقہ  
 سے ترتیب دینے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ یعنی یہ ± ۱۱۱۱۱۱ ہے  
 کسی مخصوص صورت میں علامت کو تعین کرنے کے لئے دفعہ ۱۲۸ کا قاعدہ  
 استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس استدلال کو عام صورت کے لئے بھی

توسیع دیا جاسکتی ہے۔ فرض کرو کہ ستونوں کی کوئی تعداد ف لیگئی ہے اور ان ستونوں کی ف صفوں کو لیکر تمام ممکن صغیر مقطعے بنائے گئے ہیں۔ تب ان میں سے ہر صغیر کو مستقیم صغیر سے ضرب دینا چاہئے اور پھر ایسے تمام حاصل ضربوں کے مجموعہ سے مقطع کو بیاں کرنا چاہئے بشرطیکہ ہر حاصل ضرب کی علامت متذکرہ بالا قانون سے معلوم کر لی گئی ہو۔

## مثالیں

۱۔ مقطع (۱ ب ۲ ج ۳ د) کو پہلے دو ستونوں سے بننے والے دوسرے رتبہ کے صغیر مقطعوں کی رقوم میں پھیلاؤ۔ خطوط وحدانی کی ترقیم استعمال کر کے ہم پھیلاؤ کو شکل ذیل میں لکھ سکتے ہیں:-

$$(۱ ب) (۲ ج ۳ د) - (۱ ب) (۲ ج ۳ د) + (۱ ب) (۲ ج ۳ د)$$

$$+ (۱ ب) (۲ ج ۳ د) - (۱ ب) (۲ ج ۳ د) + (۱ ب) (۲ ج ۳ د)$$

جہیں کسی حاصل ضرب کی علامت اس طور پر مقرر کی جاتی ہے کہ اول

جزو ضربی میں شامل ہوینوالی دو صفوں کو پہلے اور دوسرے محلوں میں (۱۸) حرکت دیجائے۔ مثلاً دوسری اور چوتھی صفوں کو ان محلوں میں حرکت دینے کے لئے تین ہٹاؤں کی ضرورت ہے اسلئے حاصل ضرب (۱ ب) (۲ ج ۳ د) کی علامت منفی ہے۔

۲۔ اسی طرح مقطع (۱ ب ۲ ج ۳ د ع) کو پھیلاؤ۔

جواب:- (۱ ب) (۲ ج ۳ د ع) - (۱ ب) (۲ ج ۳ د ع) + (۱ ب) (۲ ج ۳ د ع)



کو عہ 'بہ' کی قوتوں میں پھیلاؤ جہاں

عہ  $\equiv$  مہ نہ - مہ نہ 'بہ' = نہ نہ - نہ نہ 'جہ' = نہ نہ - نہ نہ  
جواب :- (۱) عہ + ب بہ + ج جہ + ف فہ + گ گہ

۵۔ دفعہ ۲ کے پھیلاؤ کی تصدیق کر نیکی کے لئے ثابت کر دو کہ عام صورت میں اس سے نمونگی ٹھیک تعداد حاصل ہوتی ہے۔

ن دیں رتبہ کے مقطع کے پہلے رستوں پر غور کرو۔ ان سے صغیر مقطعوں کی جو تعداد بنتی ہے وہ ن اشیاء میں سے ر' اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ اس پر دیکھو اگر  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$  سے (جو ہر صغیر مقطع میں نمونوں کی تعداد ہے) اور  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$  (ن - ۱) سے ضرب دیا جائے تو  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$  حاصل ہوگا جو مقطع میں نمونوں کی تعداد کے مساوی ہے۔

۱۳۶۔ مقطع کا پھیلاؤ ص در عناصر کے حاصل ضربوں میں۔ (19)

اس دفعہ اور آئندہ دفعات میں پھیلاؤ کے وہ فرید طریقے بتائے جائیں گے جو خاص شکل کے چند مقطعوں کو پھیلاؤ میں مفید ثابت ہوں گے۔  
ذیل کا پھیلاؤ یہ بتانے کے لئے کافی ہے کہ کسی مقطع کو ص در عناصر کے حاصل ضربوں میں کس طرح پھیلا یا جاسکتا ہے۔

۱	ب	ج	د
۲	ب	ج	د
۳	ب	ج	د
۴	ب	ج	د

کو جو چوتھے رتبہ کا ہے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' کے حاصل ضربوں کی



.	ج	د
ب	.	د
ب	ج	.

ہوگا۔ اسی طرح ب کا سرب کے صغیر شتم مقطع میں 'ج' د کی بجائے صفر کہنے سے حاصل ہوتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔  
 پھر کہ کو معلوم کر نیکی لئے فرض کرو کہ ج اور د کو صفر بنایا گیا ہے تو اب کا سرب حاصل شدہ مقطع کا دوسرا صغیر مقطع

(20)

.	ج	د
ب	.	د
ب	ج	.

ہوگا۔ کسی اور حاصل ضرب کا سرب اسی طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔ آخر الام  
 د کا پھیلاؤ اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

.	ج	د
ب	.	د
ب	ج	.
ب	ج	.
ب	ج	.

.	ج	د	.	ج	د	.	ج	د	.	ج	د
ب	.	د	ب	.	د	ب	.	د	ب	.	د
ب	ج	.	ب	ج	.	ب	ج	.	ب	ج	.
ب	ج	.	ب	ج	.	ب	ج	.	ب	ج	.

+ اب | ج | د | + ا | ج | د | + ا | ج | د | + ا | ج | د |  
 + ب | د | ج | + ب | د | ج | + ب | د | ج | + ب | د | ج |





جب  $\Delta$  کو پھیلا یا جاتا ہے تو وہ سب رقمیں نہیں لے آتا ہے بلکہ  
میں شامل ہیں۔ علاوہ ازیں پھیلاؤ میں مستون اول کے ہر دیگر  
عنصر اور صف اول کے ہر دیگر عنصر کا حاصل ضرب شامل  
ہوگا جبکہ دو عناصر کے برائے حاصل ضرب کو اس کے مناسب  
جزو ضربی سے ضرب دیدیا جائے۔ کسی حاصل ضرب کے لئے  
یہ جزو ضربی آسانی کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ  $\Delta$   
کے پھیلاؤ ہیں  $a_1, b_1, c_1, \dots, j_1, k_1, l_1, m_1, n_1, o_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, u_1, v_1, w_1, x_1, y_1, z_1$  وغیرہ کے  
ہم ضربی دفعہ ۳۴ کی ترتیم کی بموجب  $a_1, b_1, c_1, \dots, j_1, k_1, l_1, m_1, n_1, o_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, u_1, v_1, w_1, x_1, y_1, z_1$   
وغیرہ ہیں۔ یہ واضح رہے کہ وہ جزو ضربی جو کسی حاصل ضرب کے  
ساتھ آتا ہے (مثلاً  $\Delta$  کے پھیلاؤ میں  $e_1, f_1, g_1, h_1, i_1$  کے ساتھ) وہی ہے  
جو  $a_1$  کے ساتھ بہ تبدیل علامت آتا ہے یعنی  $-a_1$ ۔ اسی طرح  
وہ جزو ضربی جو  $e_1$  کے ساتھ آتا ہے وہی ہے جو  $b_1$  کے  
ساتھ بہ تبدیل علامت آتا ہے یعنی  $-b_1$ ۔ اور علیٰ ہذا القیاس۔  
اس قسم کے حاصل ضرب کے ساتھ جو جزو ضربی موجود ہوتا ہے  
اسکو حاصل کرنیکا قاعدہ صاف طور پر یہ ہے:- صدر رقم  $a_1$  اور  
 $n$  دو اجزائے ترکیبی سے جو حاصل ضرب میں داخل ہوتے  
ہیں بننے والے مستطیل کو مکمل کر کے چوتھا جزو ترکیبی معلوم  
کر دو مطلوبہ جزو ضربی  $\Delta$  کے اس طور پر حاصل کردہ جزو ترکیبی  
کی بجائے متناظر برا حرف منفی علامت کے ساتھ درج کرنے  
سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے آخر الامر یہ معلوم ہوتا ہے کہ  $\Delta$  کا  
پھیلاؤ شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:-





۱۳۹۔ مسئلہ ۶۔ اگر ایک خط کے عناصر باقی دوسرے خطوں کے متناظر عناصر کے (جنکو مستقل اجزائے ضربی سے ضرب دیا گیا ہو) مجموعوں کے مساوی ہوں تو مقطع معدوم ہو جاتا ہے۔

کیونکہ ایسی صورت میں اس مقطع کو ایسے مقطعوں کے مجموعہ میں تحلیل کیا جاسکتا ہے جنہیں سے ہر ایک جداگانہ طور پر معدوم ہوتا ہے۔ مثلاً

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} \text{م} \\ \text{م} \\ \text{م} \end{array} & \begin{array}{c} \text{ن} \\ \text{ن} \\ \text{ن} \end{array} & \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} & \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{م} \\ \text{م} \\ \text{م} \end{array} & \begin{array}{c} \text{ن} \\ \text{ن} \\ \text{ن} \end{array} & \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} & \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{م} \\ \text{م} \\ \text{م} \end{array} & \begin{array}{c} \text{ن} \\ \text{ن} \\ \text{ن} \end{array} & \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} & \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} \\ \hline \end{array}$$

اور بائیں طرف کا ہر مقطع معدوم ہوتا ہے (دفعہ ۱۳)۔

۱۴۰۔ مسئلہ ۷۔ اگر کسی ستون یا صف کے ہر عنصر میں باقی دوسرے ستونوں یا صفوں کے متناظر عناصر مستقل اجزائے ضربی سے علی الترتیب ضرب دینے کے بعد جمع کر دے جائیں تو مقطع کی قیمت نہیں بدلتی۔

کیونکہ جب مقطع کو دوسرے مقطعوں کے مجموعہ میں دفعہ ۱۳۸ کی طرح تحلیل کیا جاتا ہے تو وہ مقطعات جنہیں جمع کردہ خطوط واقع ہوتے ہیں معدوم ہو جاتے ہیں کیونکہ ان میں سے ہر ایک مستقل جزو ضربی کو جدا کر نیکیے بعد دو متماثل خطوط رکھتا ہے۔

مثلاً

$$\begin{vmatrix} 1 & + & م & + & ب & + & ن & + & ج & + & ب & + & ج \\ 1 & + & م & + & ب & + & ن & + & ج & + & ب & + & ج \\ 1 & + & م & + & ب & + & ن & + & ج & + & ب & + & ج \\ 1 & + & م & + & ب & + & ن & + & ج & + & ب & + & ج \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & + & م & + & ب & + & ن & + & ج & + & ب & + & ج \\ 1 & + & م & + & ب & + & ن & + & ج & + & ب & + & ج \\ 1 & + & م & + & ب & + & ن & + & ج & + & ب & + & ج \\ 1 & + & م & + & ب & + & ن & + & ج & + & ب & + & ج \end{vmatrix}$$

کیونکہ جب دوسرے مقطع کو تین دیگر مقطعوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے تو وہ مقطعات جو جمع کردہ ستونوں سے پیدا ہوتے ہیں متماثل معدوم ہو جاتے ہیں (دفعہ ۱۳۹)۔  
اس دفعہ کا مسئلہ مقطعوں کی قیمت معلوم کرنے میں عملاً بہت مفید ثابت ہوتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ حسب ذیل مقطع معدوم ہوتا ہے :-

$$\begin{vmatrix} 1 & + & م & + & ب & + & ن & + & ج & + & ب & + & ج \\ 1 & + & م & + & ب & + & ن & + & ج & + & ب & + & ج \\ 1 & + & م & + & ب & + & ن & + & ج & + & ب & + & ج \\ 1 & + & م & + & ب & + & ن & + & ج & + & ب & + & ج \end{vmatrix}$$

دوسرے ستون کے عناصر کو پہلے ستون کے متناظر عناصر میں جمع کر کے ہم ع + ب + ج کو ایک جزو ضربی کے طور پر باہر نکال سکتے ہیں اور پھر دو ستون متماثل ہو جاتے ہیں۔

۲۔ ذیل کے مقطع کی قیمت معلوم کرو :-

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

ستون اول کے عناصر کو ستون دوم کے عناصر میں سے تفریق کرنے اور ستون اول کے عناصر کو ۳ سے ضرب دیکر ان کو ستون سوم میں سے

تفریق کرنے سے ہمیں مقطع

۱	۱	۱
۱	۱	۲
۱	۱	۳

حاصل ہوتا ہے جو مثلاً مسدوم ہو جاتا ہے۔

$$-۳ = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

یہاں پہلا استعمال صف اول کے عناصر کو یکے بعد دیگرے دوسری، تیسری، چوتھی صفوں کے عناصر کے ساتھ جمع کرنے سے حاصل کیا گیا۔

$$-۴ = \begin{vmatrix} ۱۰ & -۱۰ & ۰ & ۰ \\ ۱۶ & -۲۴ & -۱۳ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۴ & ۱۱ & ۰ & ۰ \\ ۱۰ & ۱۵ & ۱۳ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۴ & ۱۱ & ۰ & ۰ \\ ۱۰ & ۱۵ & ۱۳ & ۳ \\ ۶ & ۹ & ۳ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$۲۴۰ = (۲۴ - ۱۶) ۳۰ = \begin{vmatrix} ۱۰ & ۱۰ \\ ۱۶ & ۲۴ \end{vmatrix} ۳ =$$

یہاں دوسرا استعمال ستون اول کو ۴ سے ضرب دیکر اسکو ستون دوم میں سے تفریق کرنے اور ستون اول کے دو چند کو ستون سوم میں سے تفریق کرنے سے حاصل ہوا۔ اس قسم کی مثالوں میں اس بات کی کوشش ہوتی جاوے کہ کسی صف یا ستون کے تمام عناصر کو سوائے ایک عنصر کے صفر میں تبدیل کیا جائے کیونکہ اس عمل سے دیا ہوا مقطع نخلے رتبہ کے مقطع میں تبدیل ہو جاتا ہے اور اس لئے اسکی قیمت معلوم کرنے میں آسانی پیدا ہو جاتی ہے۔ یہ بات کسی خط کو اکائیوں میں تبدیل کرنے اور ہمیشہ عمل میں آسکیگی جیسے مثال ۷ دفعہ ۱۳۲ کی صورت میں۔ لیکن عام طور پر صرف جمع یا تفریق کے عمل سے مثال بالا کی طرح اس قسم کی

آسانی پیدا ہو سکتی ہے۔

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 4 \\ \hline 14 & 2 & 19 \\ \hline 2 & 5 & 4 \\ \hline 9 & 3 & 12 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

صف اول کے دو چند کو صف دوم میں جمع کرو، صف اول کو صف سوم میں سے تفریق کرو، اور صف اول کو صف چہارم میں جمع کرو تو دوسرا استعمال حاصل ہو جائیگا۔ تحویل شدہ مقطع میں ستون دوم کا چار گنا ستون اول میں سے اور ستون دوم کا تین گنا ستون سوم میں سے تفریق کرو تو اس مقطع کو آسانی کے ساتھ محسوب کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 23 & 24 & 14 \\ \hline 14 & 24 & 9 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 23 & 2 & 24 \\ \hline 14 & 5 & 24 \\ \hline 0 & 3 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 14 & 2 & 19 \\ \hline 2 & 5 & 4 \\ \hline 9 & 3 & 12 \\ \hline \end{array}$$

۶۔ ذیل کا مقطع محسوب کرو:-

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 17 & 14 & 15 & 1 \\ \hline 9 & 4 & 4 & 12 \\ \hline 5 & 11 & 10 & 8 \\ \hline 16 & 2 & 3 & 13 \\ \hline \end{array} = 5$$

اس مقطع میں پہلے سولہ طبعی اعداد کو ایک ایسے مربع میں ترتیب دیا گیا ہے جسکو ہم ”ظلمی مربع“ کہہ سکتے ہیں کیونکہ کسی صف یا کسی ستون کے اعداد کا مجموعہ مستقل (۲۲) ہے۔ عام صورت میں پہلے  $n$  طبعی اعداد کے مربع کے لئے یہ مجموعہ  $\frac{1}{4}n(n+1)$  ہوگا۔ ایسے مقطعوں کو بقدر ایک درجہ کے فوراً اٹھایا جاسکتا ہے۔ مندرجہ بالا مقطع میں آخری تین ستونوں کو پہلے ستون میں جمع کرنے اور آخری صف کو باقی ہر صف میں سے تفریق کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں



$$\begin{vmatrix} 12 & - & 12 & 12 & - \\ 4 & - & 5 & 3 & 0 \\ 11 & - & 9 & 4 & 0 \\ 16 & & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 32 = \Delta$$

$$\begin{vmatrix} 1 & - & 1 \\ 4 & - & 5 \\ 11 & - & 9 \end{vmatrix} = 12 \times 32 =$$

اور دوسری صف کو آخری صف میں سے تفریق کرنے پر یہ ظاہر ہے کہ محمول مقطع معدوم ہو جاتا ہے۔ پس  $\Delta = 0$  ہے۔ پہلے نو طبعی اعداد کو طلسمی مربع میں ترتیب دیکر مقطع بنایا گیا ہے۔ اسکو محسوب کرو:-

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

جواب:- ۳۶۰  
۸۔ پہلے پچیس طبعی اعداد کو طلسمی مربع میں ترتیب دیکر مقطع بنایا گیا ہے۔ اسکی قیمت معلوم کرو:-

$$\begin{vmatrix} 22 & 12 & 1 & 18 & 10 \\ 12 & 8 & 25 & 12 & 2 \\ 15 & 2 & 19 & 4 & 23 \\ 9 & 21 & 13 & 5 & 14 \\ 3 & 20 & 4 & 22 & 11 \end{vmatrix}$$

جواب:- ۴۶۸۰۰۰۰

۹۔ مثال ۹ دفعہ ۱۳۴ کا مقطع دفعہ بالا کے طریقہ سے محسوب کرو:-

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \Delta \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \Delta \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \Delta$$

یہاں ہم دوسرا مقطع حاصل کرنے کے لئے دوسرے ستون کو اسکے بعد کے ستونوں میں سے تفریق کرتے ہیں۔ تحویل شدہ مقطع میں پہلی صف کو باقی دوسری صفوں میں سے تفریق کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \Delta \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \Delta \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \Delta$$

$$= (۱ + ۱ - ۱) (۱ - ۱) (۱ - ۱) =$$

$$= (۱ + ۱ - ۱) (۱ - ۱) (۱ - ۱) =$$

$$= \{ (۱ - ۱) (۱ - ۱) \} \{ (۱ + ۱ - ۱) \} =$$

$$= (۱ + ۱ - ۱) (۱ - ۱) (۱ - ۱) = (۱ + ۱ - ۱) (۱ - ۱) (۱ - ۱) =$$

۱۰۔ متماثلہ ذیل ثابت کرو:-

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \Delta \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \Delta \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \Delta$$

آخری ستون کو باقی دوسرے ستونوں میں سے تفریق کر کے (۱ + ۱ - ۱) کو جزو ضربی کے طور پر باہر نکالا جاسکتا ہے۔ باقی مقطع کو  $\Delta$  سے تعبیر کر کے اور اس میں پہلی دو صفوں کے مجموعہ کو آخری صف سے تفریق کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1-ج+ب \\ 1 & 1-ج+ب & 1-ب+ج \\ 1-ج+ب & 1-ب+ج & 1-ب+ج \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1-ج+ب \\ 1 & 1-ج+ب & 1-ب+ج \\ 1-ج+ب & 1-ب+ج & 1-ب+ج \end{array} \right| = \Delta$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1-ج+ب \\ 1 & 1-ج+ب & 1-ب+ج \\ 1-ج+ب & 1-ب+ج & 1-ب+ج \end{array} \right| = \frac{1}{1-ج+ب}$$

آخری ستون کو باقی دوسرے ستونوں میں جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

(27)

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1-ج+ب & 1-ب+ج \\ 1 & 1-ج+ب & 1-ب+ج \\ 1-ج+ب & 1-ب+ج & 1-ب+ج \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1-ج+ب & 1-ب+ج \\ 1 & 1-ج+ب & 1-ب+ج \\ 1-ج+ب & 1-ب+ج & 1-ب+ج \end{array} \right| = \Delta$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1-ج+ب & 1-ب+ج \\ 1 & 1-ج+ب & 1-ب+ج \\ 1-ج+ب & 1-ب+ج & 1-ب+ج \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1-ج+ب & 1-ب+ج \\ 1 & 1-ج+ب & 1-ب+ج \\ 1-ج+ب & 1-ب+ج & 1-ب+ج \end{array} \right| = \Delta$$

پس  $\Delta = \Delta (1-ج+ب) = \Delta (1-ج+ب) = \Delta (1-ج+ب)$   
 — متماثلہ ذیل ثابت کرو: —

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \Delta$$

پہلے ستون کو باقی دوسرے ستونوں میں سے تفریق کرو تو یہ ۰ اور ۰ ۰ اجزائے ضربی ہو جائیں گے۔ پھر تویل شدہ قطع میں پہلی صف کو ۰ سے ضرب دیکر دوسری صف سے تفریق کرو۔



(28)

$$\Delta \equiv (1 + b + c)(1 + s + b + c)(1 + s + b + c)$$

۱۴ - مقطع

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ b & 1 & d & c \\ c & d & 1 & b \\ d & c & b & 1 \end{vmatrix}$$

کو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔  
نتیجہ ہوگا

$$\Delta = (1 + b + c + d)(1 + b + c - d)(1 + c + d - b)(1 + d - b - c)$$

کیونکہ مندرجہ بالا ہر جزو ضربی مقطع کا ایک جزو ضربی ہے۔ مثلاً پہلے ستون میں دو سر استون جمع کرتے اور تیسرا اور چوتھے ستونوں کو تفریق کرنے سے یہ بتایا جاسکتا ہے کہ مقطع کا ایک جزو ضربی  $1 + b + c - d$  ہے۔  
۱۴ کی علامت کا مقابلہ کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ حاصل ضرب کی علامت منفی ہونی چاہئے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ مثال ۹ کا مقطع مندرجہ بالا مقطع کی خصوص صورت ہے کیونکہ  $1 = b + c + d$  رکھنے سے یہ مقطع حاصل ہو جاتا ہے چنانچہ مثال ۹ دفعہ ۱۴ کی متماثلہ اشکال کا مقابلہ کرنے سے یہ بات واضح ہے۔

۱۴۱ - مقطعات کی ضرب - مسئلہ ۸ - کسی رتبہ کے دو مقطعوں کا حاصل ضرب اسی رتبہ کا ایک مقطع ہوتا ہے۔  
ہم یہ مسئلہ تیسرے رتبہ کے دو مقطعوں کے لئے ثابت کرینگے۔ طالب علم کو ثبوت کی نوعیت سے معلوم ہو جائیگا کہ یہ عام صورت میں بھی اسی طرح اطلاق پذیر ہے۔ یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ دو مقطعوں  $(1 + b + c + d)$  اور  $(1 + c + d - b)$  کا حاصل ضرب ہے

$\begin{array}{|l} \text{ا، عم + ب، ب + ج، ج} \\ \text{ا، عم + ب، ب + ج، ج} \\ \text{ا، عم + ب، ب + ج، ج} \end{array}$

جس کے عناصر مقطع (ا، ب، ج) کی کسی صف کے عناصر کو مقطع (عم، ب، ج) کی کسی صف کے متناظر عناصر سے ضرب دینے سے جو حاصل ضرب ملتے ہیں ان کے مجموعے ہیں۔

اب چونکہ ہر ستون تین رموز پر مشتمل ہے یہ مقطع دوسرے ستائیس مقطعوں کے مجموعہ میں پھیلا یا جاسکتا ہے (دفعہ ۱۳۸)۔ اب یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ جب ان میں سے کسی ایک کو لکھ لیا جاتا ہے تو ہر ستون سے ایک مشترک جزو ضربی نکل سکتا ہے اور یہ کہ جزوی مقطعات میں سے چند ایسے مقطع بھی ہیں کہ مشترک اجزاء ضربی کو علیحدہ کر دینے کے بعد انہیں دو یا زیادہ ستون متماثل ہو جاتے ہیں۔ جو مقطعات اس طور پر معدوم نہیں ہوتے ان کو آسانی کے ساتھ چن لیا جاسکتا ہے۔ مثلاً اگر ہم پہلے ستون سے پہلا انتصابی خط لیں اور اس سے سب سے دوسرے ستون سے پہلا خط تو نہیں معدوم ہو نیوالا مقطع ملے گا۔ اس لئے ہمیں دوسرے ستون سے دوسرا خط اور اس کے ساتھ تیسرے ستون سے تیسرا خط لینا ہوگا تاکہ وہ مقطع حاصل ہو جو معدوم نہیں ہوتا۔ پہلے ستون کے پہلے خط کو دوسرے ستون کے تیسرے خط اور تیسرے ستون کے دوسرے خط کے ساتھ لینے سے بھی معدوم نہ ہو نیوالا مقطع حاصل ہوگا۔ ستونوں کے مشترک اجزاء ضربی کو باہر نکال لینے سے ان دو مقطعوں کو یوں لکھا جاسکتا ہے:-

(29)

ا، عم + ب، ب + ج، ج	ا، عم + ب، ب + ج، ج	ا، عم + ب، ب + ج، ج	ا، عم + ب، ب + ج، ج
ا، عم + ب، ب + ج، ج	ا، عم + ب، ب + ج، ج	ا، عم + ب، ب + ج، ج	ا، عم + ب، ب + ج، ج
ا، عم + ب، ب + ج، ج	ا، عم + ب، ب + ج، ج	ا، عم + ب، ب + ج، ج	ا، عم + ب، ب + ج، ج

اسی طرح باری باری سے پہلے ستون کے باقی دو سرے  
خطوں کو لینے سے ہم چار اور مقطوعے حاصل کرتے ہیں جو معدوم نہیں ہوئے  
پس کل چھ ارقام ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ انہیں سے ہر ایک میں (۱ ب ۲ ج)  
ایک جزو ضربی ہے۔ اس جزو ضربی کو باہر نکالنے سے ان چھ رقموں کا  
مجموعہ باقی رہتا ہے :-

ع ۱ ب ۲ ج ۳ - ع ۲ ب ۳ ج ۴ - ع ۳ ب ۴ ج ۵ - ع ۴ ب ۵ ج ۶ - ع ۵ ب ۶ ج ۷ - ع ۶ ب ۷ ج ۸  
اور یہ مقطع (ع ۲ ب ۳ ج ۴) ہے۔ اسلئے ہم نے ثابت کر دیا کہ مندرجہ بالا  
مقطع دو دے ہوئے مقطعوں کا حاصل ضرب ہے۔  
دے ہوئے مقطعوں میں سے کسی میں ستونوں کی بجائے  
صفوں کو لکھا جاسکتا ہے۔ اس لئے حاصل ضرب کو متبادل مختلف  
شکلوں میں مقطع کے طور پر لکھا جاسکتا ہے لیکن ظاہر ہے کہ ان کو  
پہیلانے سے وہی قیمت حاصل ہوگی۔

۱۲۲۔ مقطعوں کا حاصل ضرب (سلسل)۔ رپلاس کے  
پیملاؤ کے طریقہ سے جسکی تشریح دفعہ ۱۳۵ میں ہو چکی ہے دفعہ گذشتہ  
کے مسئلہ کے ثبوت کا ایک اور طریقہ ملتا ہے جس میں ایک ہی رتبہ  
کے دو دے ہوئے مقطعوں کا حاصل ضرب ایک مقطع کی شکل میں  
بیان کیا جاسکتا ہے۔  
اس ثبوت کی نوعیت کافی طور پر ذیل کے تیسرے رتبہ کے  
دو مقطعوں پر استعمال کرنے سے واضح ہو جائیگی۔

دو مقطعوں (۱ ب ۲ ج) اور (ع ۱ ب ۲ ج) کا حاصل ضرب عریکاً





اور یہ مقطع، مقطع

(جو - ۱ کے مساوی ہے)

اور تمام صغیر مقطع کے حاصل ضرب (ٹھیک علامت کے ساتھ) کے مساوی ہے اور یہ حاصل ضرب وہی مقطع ہے جو دفعہ مابوق میں حاصل ہوا تھا۔ اب یہ امر کہ حاصل ضرب کی علامت منفی ہونی چاہئے اس طرح واضح ہے کہ پہلی تین صفوں کو نیچے یہاں تک حرکت دینی پڑتی ہے کہ زیر بحث دو صغیر مقطعوں کے وتر خود مقطع کا وتر بن جائیں۔ طالب علم کو یہ دیکھنے میں کوئی مشکل پیش نہیں آئیگی کہ عام صورت میں اس قسم کے مساویوں کی تعداد طاق ہے اگر دئے ہوئے مقطعوں کا رتبہ طاق ہو اور جفت ہے اگر مقطعوں کا رتبہ جفت ہو۔ پس دفعہ ۱۲۱ کے حاصل ضربی مقطع کی علامت ہمیشہ مثبت ہوتی ہے۔

اس دفعہ اور دفعہ گذشتہ کا اہم مسئلہ مندرجہ ذیل مثالوں سے بخوبی واضح ہو جائیگا۔

## مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ دو مقطعوں

$$\begin{array}{|c|c|} \hline ۱ + خ ب & ج + خ د \\ \hline - ج + خ د & ۱ - خ ب \\ \hline \end{array}$$

کا حاصل ضرب (جہاں  $خ = ۱$ ) شکل

$$\begin{array}{|c|c|} \hline د - خ ج & ب - خ ۱ \\ \hline - ب - خ ۱ & د + خ ج \\ \hline \end{array}$$

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں

۱)  $\equiv$  ب ج - ب ج + ا د - ا د  $\equiv$  ب ج - ج ا + ا ب - ا ب - ب د  $\equiv$  د  
 ج  $\equiv$  ا ب - ا ب + ج د - ج د  $\equiv$  د  $\equiv$  ا د + ا ب + ب ج + ج د + د د  
 اور پھر یہ لڑکا یہ مسئلہ ثابت کرو :-

$$(ا + ب + ج + د) (ا + ب + ج + د)$$

$\equiv$  (ا د + ا ب + ج ج + د د) + (ب ج - ب ج + ج ج + ا د - ا د - ا د)  
 + (ج ا - ج ا + ا ب - ا ب + ا ب - ا ب + ج ج - ج ج)  
 یعنی دو مجموعوں کا حاصل ضرب جنہیں سے ہر ایک چار مربعوں کا مجموعہ  
 ہے چار مربعوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے -  
 ۲ - تیسرے رتبہ کے مقطع کے مربع کے لئے حسب ذیل جملہ ثابت کرو :-

$$\begin{vmatrix} ۱ & ب & ج \\ ۱ & ب & ج \\ ۱ & ب & ج \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ۲(ا ج - ب ج) & ا ج + ا ج - ۲ ب ج & ا ج + ا ج - ۲ ب ج \\ ا ج + ا ج - ۲ ب ج & ۲(ا ج - ب ج) & ا ج + ا ج - ۲ ب ج \\ ا ج + ا ج - ۲ ب ج & ا ج + ا ج - ۲ ب ج & ۲(ا ج - ب ج) \end{vmatrix} =$$

یہ ثابت ہو جاتا ہے اگر ہم دو مقطعوں

$$\begin{vmatrix} ۱ & ب & ج \\ ۱ & ب & ج \\ ۱ & ب & ج \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} ۱ & ب & ج \\ ۱ & ب & ج \\ ۱ & ب & ج \end{vmatrix}$$

کو ضرب دیں جو صرف جزو ضربی ۲ سے متفادات ہیں -

۳ - مثلاً ذیل ثابت کرو :-

$$\begin{vmatrix} ۲(ا ج - ب ج) & ا ج + ا ج - ۲ ب ج & ا ج + ا ج - ۲ ب ج \\ ا ج + ا ج - ۲ ب ج & ۲(ا ج - ب ج) & ا ج + ا ج - ۲ ب ج \\ ا ج + ا ج - ۲ ب ج & ا ج + ا ج - ۲ ب ج & ۲(ا ج - ب ج) \end{vmatrix} \equiv$$

(32)

یہ آسانی کے ساتھ ثابت ہوتا ہے اگر ہم دو متماثل مقطعوں

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

کو باہم ضرب دیں۔

۴۔ دفعہ ۱۳۲ مثال ۱۰ کے مقطع کا مربع لیکر چار درجہ کی اصلوں  
عہ، یہ، جہ، ضہ کے درمیان ذیل کا رشتہ ثابت کرو جہاں س، س، س  
س، س، س کے وغیرہ کے وہی معنی ہیں جو جلد اول کے آٹھویں باب میں بیان  
کئے گئے ہیں۔

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

طالب علم کو کسی درجہ کی مساوات کے لئے ایک متناظر مقطع (اصلوں کی  
قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں) جو فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کے  
مساوی ہے لکھ لینے میں کوئی دقت محسوس نہ ہوگی۔

۵۔ مقطع

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کر دو جسمیں س، س، س، س، وغیرہ تین مقداروں ع، ب، جہ کی قوتوں کے مجموعے ہیں۔ یہ مقطع، دو مقطعوں

ع	ب	جہ	لا	۰	ع	ب	جہ	۰	ا
ع	ب	جہ	لا	۰	ع	ب	جہ	۰	ا
ع	ب	جہ	لا	۰	ع	ب	جہ	۰	ا
ع	ب	جہ	لا	۰	ع	ب	جہ	۰	ا

کا حاصل ضرب ہے اور انہیں سے ہر ایک آسانی کے ساتھ اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے۔

۶۔ مثال ۸ صفحہ ۸۰ جلد اول کا نتیجہ ذیل کے دو مقطعوں کو ضرب دیکر ثابت کرو:-

لا	ما	ی	،	لا	ما	ی
ی	لا	ما		ی	لا	ما
ما	ی	لا		ما	ی	لا

۷۔ ثابت کرو کہ مختلف رتبوں کے دو مقطعوں کو ضرب دیا جاسکتا ہے۔ کیونکہ ان کے رتبہ مساوی بنائے جاسکتے ہیں چنانچہ کسی مقطع کا رتبہ، ستونوں کی کوئی تعداد اور صفوں کی مساوی تعداد جمع کرنے سے بڑھایا جاسکتا ہے جبکہ جمع کردہ ارقام میں وتری ارقام اکائیاں ہوں اور باقی سب صفر۔ مثلاً

۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

جمع کردہ عناصر کا صرف یہ اثر ہوگا کہ مقطع اکائی سے ضرب کھا جائیگا۔

تیار ہو عام صورت میں جمع کر وہ عناصر کا ایک جٹ (یعنی وہ جو ہر ترکیبی  
 و انتہی ظرف یا ایسا ظرف ہوں) کسی مقداروں کا لیا جا سکتا ہے یا نہیں  
 یا تو وہ سرایت محضوں کے تحت ہو۔ چنانچہ (۱) یہ کہ تو ترکیبی ہوں  
 مقبولوں پر اسے کسی ایک میں لکھا جا سکتا ہے۔

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

وقت ۱۳۴ کے پھیلاؤ کے ذریعہ ظاہر ہے۔

۱۳۴۔ مستطیل آدا ہے۔ وہ آدا ہے جس میں مقبولوں کی

مقدار مقبولوں کی مقدار کے مساوی ہے جو مستطیل کہا جا سکتا ہے  
 وہ خود ہی متن تقابل کو قیاس میں کرتے۔ لیکن اگر ایک ہی مقدار  
 دو ایسے آدا ہے کہ ہر جملہ کو وقت ۱۳۴ کے تحت سے اچھے طریقہ  
 ہم ایک سطح اخذ کر سکتے ہیں جس کی قیمت کی ایک ہی قیمت کرے۔

(۱۱) جب مقبولوں کی مقدار مقبولوں کی مقدار سے بڑھ جائے۔

مستطیل آدا ہے

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

اور انچہ ہر ہی عمل کرے جو وہ مقبولوں کو ضرب دے میں کیا گیا ہے

جو ہمیں مقبول

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

حاصل ہوتا ہے۔ یہی قیمت ساری کے ساتھ منقطع ہو جاتی ہے  
 (۱) ۱۰۰ - ۱۰۰ = ۰ (۲) ۱۰۰ - ۱۰۰ = ۰ (۳) ۱۰۰ - ۱۰۰ = ۰  
 (۴) ۱۰۰ - ۱۰۰ = ۰ (۵) ۱۰۰ - ۱۰۰ = ۰ (۶) ۱۰۰ - ۱۰۰ = ۰  
 یعنی ایک آڑ کے لئے جسے منقطع بن گئے ہیں اصلوں  
 تعداد کے مساوی ستوں کی تعداد دینے سے انکو وہ سب  
 آڑا کرتے ہیں کہ منقطع ہوتے ہیں ان کے ساتھ منقطع  
 اور ایسے ہی تمام آڑوں کو منقطع کر دینا وہ سب آڑا کرتے ہیں  
 کے مساوی ہے۔

یہ مسئلہ اگر دیکھتے ہیں تو ۱۰۰ - ۱۰۰ = ۰ اور ۱۰۰ - ۱۰۰ = ۰  
 قریب کے قریب کے منقطع ہوتے ہیں اور ۱۰۰ - ۱۰۰ = ۰  
 میں سے کسی ایک آڑ کو منقطع کر دینا وہ سب آڑا کرتے ہیں  
 دیکھا جاسکتا ہے۔

۳۰ جب منقطع کی تعداد ستوں کی تعداد سے بڑھتی  
 ہو تو وہاں منقطع ہوتا ہے۔

$$\left. \begin{array}{l} ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \end{array} \right\} \begin{array}{l} ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \end{array} \left. \begin{array}{l} ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \end{array} \right\} \begin{array}{l} ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \\ ۱۰۰ \end{array}$$

لہذا قریب کے محل کی تحلیل کو وہ منقطع کر دینا وہ سب آڑا کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 \\ \hline \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 \\ \hline \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 \\ \hline \end{array}$$

اب یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ یہ مقطع وہی ہے جو پیدا ہوتا اگر صفروں کا ایک ستون دئے ہوئے آراستوں میں سے ہر ایک میں جمع کر دیا جائے اور پھر اس طور پر بنے ہوئے مقطعوں کو ضرب دیا جاتا ہے پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مندرجہ بالا مقطع معدوم ہوتا ہے۔ اسی طرح کابینوت عام صورت میں دیا جاسکتا ہے۔ لسی مثال میں صرف اس بات کی ضرورت ہے کہ صفروں کے ستون ہر آراستے میں جمع کر دئے جائیں تاکہ ستونوں کی تعداد صفوں کی تعداد کے مساوی ہو جائے اور پھر ان دو مقطعوں کو ضرب دیدیا جائے۔

## مثالیں

(35)

۱۔ دو آراستوں۔

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 \\ \hline \end{array} \quad (1) \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

سے ثابت کرو کہ

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 \\ \hline \end{array} \quad (1) \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

۲۔ دو آراستوں

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 \\ \hline \end{array} \quad (1) \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 & \text{ا}^1 \text{ع}^1 + \text{ب}^1 \text{ہ}^1 \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

سے ثابت کرو کہ





(86)

۶۔ ن ویں درجہ کی عام مساوات کے لئے جسکی اصلیں  $e^1, e^2, e^3, \dots, e^n$  ہوں اور اصولوں کی قوتوں کے مجموعے  $s^1, s^2, s^3, \dots, s^n$  ہوں،  
 وغیرہ، ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} s^1 & s^2 & s^3 & \dots & s^n \\ s^2 & s^3 & s^4 & \dots & s^{n+1} \\ s^3 & s^4 & s^5 & \dots & s^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^n & s^{n+1} & s^{n+2} & \dots & s^{2n} \end{vmatrix} = 0 \quad (e - e^2)$$

یہ فوراً واضح ہو جاتا ہے اگر ہم حسب ذیل آراستے کا مربع لیں۔

$$\begin{vmatrix} 1 & e & e^2 & \dots & e^{n-1} \\ e & e^2 & e^3 & \dots & e^n \\ e^2 & e^3 & e^4 & \dots & e^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{n-1} & e^n & e^{n+1} & \dots & e^{2n-1} \end{vmatrix}$$

۷۔ عام مساوات کے لئے اسی طرح ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} s^1 & s^2 & s^3 & \dots & s^n \\ s^2 & s^3 & s^4 & \dots & s^{n+1} \\ s^3 & s^4 & s^5 & \dots & s^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^n & s^{n+1} & s^{n+2} & \dots & s^{2n} \end{vmatrix} = 0 \quad (e - e^2) \quad (e^2 - e^3) \quad (e^3 - e^4) \quad \dots \quad (e^{n-1} - e^n)$$

پچھلی مثال کی طرح یہ بھی آسانی کے ساتھ ثابت ہوتا ہے اگر ہم ایک

مناسب آراستے کا مربع لیں۔ نیز اس قسم کے روابط کا سلسلہ قائم کرئیں  
 یہی عمل اختیار کیا جاسکتا ہے۔ جب آراستے میں صفوں کی تعداد  
 مساوات کے درجہ کے مساوی ہوتی ہے تو مقطع کی قیمت اصولوں  
 فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب ہوتی ہے (دیکھو مثال ۴ دفعہ ۱۴۲)۔ جب  
 صفوں کی تعداد مساوات کے درجہ سے بڑھ جائے تو متناظر مقطع کی قیمت  
 صفر ہے۔ مثلاً جو تھے رتبہ کا مقطع جسکا حوالہ اوپر دیا گیا ہے دوسرے  
 اور تیسرے درجہ کی مساواتوں کے لئے معدوم ہوتا ہے۔

۸۔ عام مساوات کے لئے ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} s^1 & s^2 & s^3 & \dots & s^n \\ s^2 & s^3 & s^4 & \dots & s^{n+1} \\ s^3 & s^4 & s^5 & \dots & s^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^n & s^{n+1} & s^{n+2} & \dots & s^{2n} \end{vmatrix}$$

$$\Sigma = (ب - ج) (ج - ع) (ع - ب) (لا - ع) (لا - ب) (لا - ج) \\ \text{دو آراستوں}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} لا - ع \\ ع (لا - ع) \\ ع (لا - ع) \end{array} \quad \begin{array}{l} ب - لا \\ ب (لا - ب) \\ ب (لا - ب) \end{array} \quad \begin{array}{l} ج - لا \\ ج (لا - ج) \\ ج (لا - ج) \end{array} \end{array} \right\}$$

کو ضرب دیکر ہم ثابت کرتے ہیں کہ

$$\left| \begin{array}{ccc} س - لا - س & س - لا - س & س - لا - س \\ س - لا - س & س - لا - س & س - لا - س \\ س - لا - س & س - لا - س & س - لا - س \end{array} \right|$$

$\Sigma$  کے مساوی ہے اور اسکو آسانی کے ساتھ مجوزہ مقطع میں مستحیل کیا جاسکتا ہے۔

عام طور پر اسی طریقہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ (پ + ا) دیں رتبہ کا  
ایسی ہی شکل کا مقطع متناظر متشکل تفاعل کے مساوی ہے جسکی ہر رقم میں  
ابتدائی مساوات کے پ اجزائے ضربی شامل ہوتے ہیں جبکہ انکو پ  
اصولوں کے مربع دار فرقوں کے حاصل ضرب سے ضرب دیدیا جائے۔  
۹۔ ذیل کے مقطع کی قیمت معلوم کرو اور پھر اس سے پہلی قسم کے  
آراستوں کی خاصیت کا ایک اور ثبوت اخذ کرو:-

(37)

$$\left| \begin{array}{ccc} لا - س & س - لا & س - لا \\ س - لا - س & س - لا - س & س - لا - س \\ س - لا - س & س - لا - س & س - لا - س \end{array} \right|$$

لاپلاس کے طریقہ سے اسکو پھیلا کر ہم آسانی کے ساتھ یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ

اسکی قیمت  $\Sigma (A, B, C)$  (عدا بہم) ہے جو صفحہ ۵۳ کے چھ حاصل ضربوں پر مشتمل ہے۔ اور مقطع میں دفعہ ۱۴۲ کی طرح پہلے ستون کو عدا سے، دوسرے کو بے سے، وغیرہ ضرب دیکر ان کے مجموعہ کو پانچویں ستون میں جمع کر کے ہم اس مقطع کو دوسرے رتبہ کے مقطع میں تحویل کر دیتے ہیں (دیکھو دفعہ ۱۴۲ (۱) میں ابتدا حاصل کردہ مقطع)۔

۱۴۲۔ خطی مساواتوں کے نظام کا حل۔ ہم نے دفعہ ۱۳۴ میں دیکھا ہے کہ مقطع کو کسی صف یا ستون کے عناصر کے ایک خطی متجانس تفاعل کے طور پر پھیلا یا جا سکتا ہے جس میں کسی عنصر کا سرابنی مناسب علامت کے ساتھ وہ صغیر مقطع ہوتا ہے جو اس عنصر کے جواب میں ہے۔ مثلاً

$$\Delta = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$

اب سر  $A_1, A_2, A_3$  وغیرہ دوسرے ستونوں کے عناصر کے ساتھ  
ن۔ ا متماثل رشتوں سے مربوط ہوتے ہیں یعنی

$$B_1 + B_2 + B_3 + \dots = 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 + \dots = 0, \text{ وغیرہ}$$

کیونکہ ان میں سے ہر ایک مساوات کی سیدھی طرف کا جملہ، مقطع میں  $A_1, A_2, A_3$  وغیرہ کی بجائے متناظر ستون کے عناصر درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور اس لئے اسکو معدوم ہونا چاہئے۔  
ان رشتوں کی مدد سے ہم خطی مساواتوں کے نظام کا حل لکھ سکتے ہیں۔ چنانچہ تین مجهول مقداروں  $A, B, C$  کی صورت پر اس کا اطلاق عام طریق عمل کو واضح کر دینے کے لئے کافی ہے۔  
فرض کرو کہ مساواتیں ہیں

$\begin{aligned} \text{۱} \text{ لا} + \text{ب} \text{ ما} + \text{ج} \text{ ی} &= \text{م} \text{ ۱} \\ \text{۲} \text{ لا} + \text{ب} \text{ ما} + \text{ج} \text{ ی} &= \text{م} \text{ ۲} \\ \text{۳} \text{ لا} + \text{ب} \text{ ما} + \text{ج} \text{ ی} &= \text{م} \text{ ۳} \end{aligned}$

(38) پہلی مساوات کو ۱ سے، دوسری کو ۲ سے، تیسری کو ۳ سے ضرب دو اور جمع کر دو تو ما اور ی کے سر متذکرہ بالا ثابت شدہ رشتہ کی وجہ سے معدوم ہو جاتے ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$(\text{۱} \text{ لا} + \text{۲} \text{ لا} + \text{۳} \text{ لا}) = \text{۱} \text{ م} + \text{۲} \text{ م} + \text{۳} \text{ م}$

یعنی

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{۱} \text{ م} & \text{ب} \text{ ۱} & \text{ج} \text{ ۱} \\ \text{۲} \text{ م} & \text{ب} \text{ ۲} & \text{ج} \text{ ۲} \\ \text{۳} \text{ م} & \text{ب} \text{ ۳} & \text{ج} \text{ ۳} \end{vmatrix}$$

جہاں  $\Delta$  سے وہ مقطع تعبیر ہوتا ہے جو نو مقداروں ۱، ۲، ۳، ج وغیرہ سے بنتا ہے۔

اسی طرح ۱، ۲، ۳ سے ضرب دینے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$(\text{۱} \text{ ب} + \text{۲} \text{ ب} + \text{۳} \text{ ب}) = \text{۱} \text{ م} + \text{۲} \text{ م} + \text{۳} \text{ م}$

یعنی

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{۱} \text{ لا} & \text{۱} \text{ م} & \text{ج} \text{ ۱} \\ \text{۲} \text{ لا} & \text{۲} \text{ م} & \text{ج} \text{ ۲} \\ \text{۳} \text{ لا} & \text{۳} \text{ م} & \text{ج} \text{ ۳} \end{vmatrix}$$

جہاں بائیں طرف کا مقطع وہ ہے جو  $\Delta$  ہو جاتا ہے جبکہ اس میں دوسرے

ستون کے عناصر کی بجائے م، م، م، درج کئے جاتے ہیں۔  
اسی طرح می کے لئے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ان قیمتوں کو زیادہ اختصار کے ساتھ یوں لکھا جاسکتا ہے:-

$$\begin{aligned} \Delta &= (1, 1, 1) = 0 \\ \Delta &= (1, 1, 1) = 0 \\ \Delta &= (1, 1, 1) = 0 \end{aligned}$$

جہاں کسی مجہول مقدار کی قیمت معلوم کرنے میں دی ہوئی مساواتوں کی  
بائیں طرف کی معلومہ مقداروں م، م، م، وغیرہ کو  $\Delta$  میں مطلوبہ  
مجہول مقدار کے سروں کی بجائے درج کرنا اور اس طور پر بنے ہوئے  
مقطع کو  $\Delta$  سے تقسیم کرنا پڑتا ہے۔

مثالیں

۱۔ ان مساواتوں کو حل کرو۔

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 1 + 1 \\ 2 &= 1 + 1 + 1 \\ 3 &= 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

مندرجہ بالا مضبوطوں سے آسانی کے ساتھ حل معلوم کیا جاسکتا ہے اور  
یہ بتایا جاسکتا ہے کہ کسی مجہول مقدار کی قیمت ان مساواتوں میں انجے سر کے



$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} \\ \hline \end{array}$$

وغیرہ۔

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} \\ \hline \end{array}$$

وغیرہ۔

۱۴۵۔ خطی متجانس مساواتیں۔ جب ن متغیروں کے (40)

درمیان (ن - ۱) خطی متجانس مساواتیں دی جائیں تو ان میں سے کسی ایک کو مساواتوں کی باہیں طرف منتقل کرنے اور پھیلی دفعہ کی طرح حل کرنے سے متغیروں کی نسبتیں متعین ہو سکتی ہیں یا ہم ان نسبتوں کو زیادہ سہولت کے ساتھ حسب ذیل طریقہ پر معلوم کر سکتے ہیں۔ ہم چار مقداروں 'لا'، 'ما'، 'ی'، و کے درمیان میں مساواتوں کی مخصوص صورت لیتے ہیں جو عام طریقہ عمل کو واضح کرینے کے لئے کافی ہے:-

$$\begin{cases} ۱. لا + با + ما + جا + می + دم + د = ۰ \\ ۲. لا + با + ما + جا + می + دم + د = ۰ \\ ۳. لا + با + ما + جا + می + دم + د = ۰ \end{cases} \dots (۱)$$

انہیں ایک چوتھی مساوات شامل کیا سکتی ہے جس کے سرغیر متعین ہوں

$$۱. لا + با + ما + جا + می + دم + د = ۰ \dots (۲)$$

معمول کی طرح (۱) ب، ج، د، کو  $\Delta$  سے تعبیر کر کے اور دفعہ گذشتہ کے طریقہ سے ان چار مساواتوں کو حل کر کے ہم  $م = ۱$ ،  $م = ۲$ ،  $م = ۳$ ،  $م = ۴$  لے ہونے کی وجہ سے ذیل کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

$$\Delta = لا = لہ = لپ = ما = لب = می = لہ = جہ = دہ = لہ = د$$

$$\text{یعنی } \frac{لا}{لہ} = \frac{لہ}{لب} = \frac{لب}{جہ} = \frac{جہ}{دہ} = \frac{دہ}{لہ} = \frac{لہ}{\Delta} \dots\dots\dots (۳)$$

انہیں سے پہلی تین مساواتیں، لا، ما، می، و کی نسبتوں کو دی ہوئی تین مساواتوں کے سروں کی رقوم میں بیان کرتی ہیں اور عام صورت میں متغیر ان سروں کے متناسب ہوتے ہیں جو ان ویں صف کے عناصر کی رقوم میں مقطع  $\Delta$  کے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں جبکہ یہ ن ویں صف، دی ہوئی مساواتوں سے حاصل ہونیوالی (ن - ۱) صفوں میں اضافہ کر دیجائے۔

اب ہم وہ شرط بیان کر سکتے ہیں کہ ن خطی متجانس مساواتیں ایک دوسری کے ساتھ صحیح ہوں۔ مثلاً مساوات (۲) جبکہ  $لہ = ۰$ ، مساواتوں (۱) کے ساتھ صحیح ہو۔ ہمیں صرف (۱) سے اخذ کردہ نسبتوں کو (۲) میں درج کرنا پڑیگا جس سے ہمیں حاصل ہوگا

$$لہ + لب + لپ + جہ + دہ = ۰$$

$$\Delta = ۰ \quad \text{یعنی}$$



(4)

اسی چیز کا اٹھارہ مساواتوں (۳) سے ہوتا ہے کیونکہ اگر  
 $\Delta =$  اور اگر لا، ما، می، و سب کے سب معدوم نہ ہوں تو  
 $\Delta$  کو معدوم ہونا چاہئے۔

جو کچھ ثابت ہوا اسکو اس بیان کیا جاسکتا ہے :-  $\Delta$  ن  
 مقداروں کی خطی اور متجانس  $\Delta$  مساواتوں سے  $\Delta$  ن  
 مقداروں کو ساقط کر نیکاً نتیجہ یہ ہوگا کہ وہ مقطع جو دی ہو  
 مساواتوں کے سروں سے بنتا ہے صفر کے مساوی ہوگا۔

۱۴۶۔ متکافی مقطعات۔ اجزائے ضربی ا، ب، ج، ...

ا، ب، وغیرہ کو (دیکھو دفعہ ۱۳۴) جو مقطع کے پھیلاؤ میں واقع  
 ہوتے ہیں (یعنی پہلے صغیر مقطعات کو انکی مناسب علامت کے  
 ساتھ) مقابوب عناصر یا اجزائے ترکیبی کہا جاسکتا ہے اور  
 ان سے بننے والے مقطع کو مقابوب یا متکافی مقطع۔ اب ہم چند  
 مفید رشتے ثابت کریں گے جو دے ہوئے مقطع اور اس کے متکافی  
 مقطعات میں پائے جاتے ہیں :-

(۱) دے ہوئے مقطع کی رقوم میں متکافی مقطع کو بیا

کرنا۔ فرض کرو کہ  $\Delta$  کا متکافی مقطع  $\Delta$  سے تعبیر ہوتا ہے۔

دونوں مقطعوں

$$\left| \begin{array}{ccc} \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta \end{array} \right| = \Delta \left| \begin{array}{ccc} \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta \end{array} \right|$$

کو ضرب دو تو حاصل ضربی مقطع میں تمام عناصر سوائے اُنکے جو درجہ میں ہیں معدوم ہو جاتے ہیں (دفعہ ۱۴۴) اور نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$^3\Delta = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \Delta \\ \cdot & \Delta & \cdot \\ \Delta & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \Delta \Delta$$

پس  $\Delta = \Delta^2$

تیسرے رتبہ کے دو مقطعوں کی مخصوص صورت میں جو عمل یہاں اختیار کیا گیا ہے اسکا اطلاق عام صورت میں بھی اسی طرح ہو سکتا ہے۔ چنانچہ ہمیں حاصل ہوگا  $\Delta \Delta = \Delta^2$  یعنی  $\Delta = \Delta^2$ ۔

پس متکافی مقطع دے ہوئے مقطع کی (ن-۱) ویں قوت کے مساوی ہوتا ہے۔

(۲) ابتدائی عناصر کی رقوم میں متکافی مقطع کے کسی صغیر کو بیان کرنا۔

مثلاً ہم جو تھے رتبہ کا مقطع لیتے ہیں اور اس کے متکافی کے پہلے صغیر کو ابتدائی مقطع کے عناصر کی رقوم میں بیان کرتے ہیں۔ مساوات ذیل میں داہنی طرف کے دو مقطعوں کو ضرب دینے اور دفعہ ۱۴۴ کی متماثلہ مساواتیں استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \Delta \\ \cdot & \cdot & \Delta & \cdot \\ \cdot & \Delta & \cdot & \cdot \\ \Delta & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \Delta \\ \cdot & \Delta & \cdot & \cdot \\ \Delta & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \Delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \Delta \\ \cdot & \Delta & \cdot & \cdot \\ \Delta & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \Delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{یعنی} \\ \Delta = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} = \Delta_1 \\ \text{یا } (\text{ب} \text{ ج} \text{ د}) = \Delta_1 \end{array}$$

پس  $\Delta$  کا پہلا صغیر جو  $\Delta_1$  کا متمم ہے اس طور پر بیان ہو جاتا ہے۔  
پھر  $\Delta$  کے دوسرے صغیروں کو بیان کرنے کے لئے ہم بالکل اس کے مشابہ عمل اختیار کرتے ہیں۔

چنانچہ

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} \\ \text{جس سے} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Delta = \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{د} \\ \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{د} \\ \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} \\ \text{یا } (\text{ج} \text{ د}) = \Delta_2 \end{array}$$

عام مسئلہ کو یوں بیان کر سکتے ہیں:۔ م رتبہ کا صغیر جو  
مقلوب عناصر سے بنتا ہے دو مقداروں کے حاصل ضرب کے  
مسادی ہے، ایک مقدار ابتدائی مقطع  $\Delta$  کے متناظر  
صغیر کا متمم مقطع ہے اور دوسری مقدار  $\Delta$  کی (م - ۱) ویں قوت  
ثبوت کے تذکرہ بالا طریقہ کی تقسیم ہو سکتی ہے۔ مثلاً پانچویں

(۴)

رتبہ کے مقطع کی صورت میں تیسرے رتبہ کے ایک صغیر کے لئے طالب علم حسب ذیل جملے کی آسانی کے ساتھ تصدیق کر سکتا ہے:

$$(ج ۳ د ۴ ع ۵) = (ا ۱ ب ۲) \Delta$$

یہ ظاہر ہے کہ اگر ابتدائی مقطع  $\Delta$  معدوم ہو جائے تو نہ صرف اسکا متکافی مقطع معدوم ہوتا ہے بلکہ کسی رتبہ کے اسکے سب صغیر بھی معدوم ہوتے ہیں۔ دوسرے رتبہ کے صغیروں کا معدوم ہونا ذیل کی مفید شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے:- جب مقطع معدوم ہوتا ہے تو اس کے متکافی مقطع کی کسی صف کے عناصر کسی دوسری صف کے عضروں کے متناسب ہوتے ہیں اور کسی ستون کے عنصر کسی دوسرے ستون کے عضروں کے متناسب۔

۱۴۷۔ متشاکل مقطعات۔ مقطع کے دو عضروں کو ہم فرد وج اسوقت کہیں گے جبکہ صدر عناصر کے لحاظ سے ایک کا مقام صفوں میں دہی ہو جو دوسرے کا ستونوں میں ہے۔ مثلاً دہ اور بہم فرد وج ہیں کیونکہ ایک دوسری صف میں چوتھا مقام اختیار کرتا ہے اور دوسرا دوسرے ستون میں چوتھا مقام۔ صدر عناصر میں سے ہر ایک اپنا آپ فرد وج ہے۔ کوئی دو فرد وج عناصر ایک خط میں واقع ہوتے ہیں جو صدر و تر پر نمود ہوتا ہے اور وہ اس سے مخالف سمتوں میں مساوی فاصلے پر رہتے ہیں۔

متشاکل مقطع وہ ہے جس میں ہر دو فرد وج عناصر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔ ایسے مقطعات کی مثالیں طالب علم کو

دفعہ ۱۳۲ مثلاً ۲، ۹، ۱۰ اور دفعہ ۱۳۵ مثال ۲ میں لینگی۔  
 متشاکل مقطع میں کسی دو مزدوج عناصر کے متمم پہلے صغیر مساوی  
 ہوتے ہیں کیونکہ ان میں صرف صفوں اور ستونوں کے باہمی تبادلہ کا  
 فرق ہوتا ہے۔ متناظر مقلوب عناصر بھی مساوی ہوتے ہیں  
 اور دونوں صورتوں میں صغیروں کی علامتیں وہی ہوتی ہیں۔ اس  
 نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک متشاکل مقطع کا متکافی مقطع بھی خود متشاکل  
 ہوتا ہے۔

مدر صغیر سب کے سب متشاکل مقطعات ہیں۔  
 دفعہ ۱۳۴ کا پھیلاؤ کا طریقہ متشاکل مقطعوں کی صورت میں  
 خاص طور پر مفید ہے جیسا کہ حسب ذیل مثالوں سے واضح ہو جائیگا

## مثالیں

### ۱۔ متشاکل مقطع

$$\begin{vmatrix} \text{گ} & \text{ھ} & ۱ \\ \text{ف} & \text{ب} & \text{گ} \\ \text{ج} & \text{ن} & \end{vmatrix} \equiv \Delta$$

کا متکافی مقطع معلوم کرو۔

دفعہ ۱۳۲ کی بموجب متکافی عنصروں کو بڑے حروف سے تعبیر  
 کرو تو  $\Delta$  کو شکلوں ۱ + ھ + گ + ھ + ب + ب  
 - ف + ف + گ + ف + ف + ج میں سے کسی ایک  
 میں پھیلا یا جاسکتا ہے۔ اب متکافی مقطع  $\Delta$  کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں:-

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \text{ب} - \text{ج} - \text{ف} & \text{ف} - \text{گ} - \text{ج} & \text{ج} - \text{ھ} - \text{ف} \\ \text{ن} - \text{گ} - \text{ج} & \text{ج} - \text{ھ} - \text{ج} & \text{گ} - \text{ا} - \text{گ} \\ \text{ھ} - \text{ب} - \text{ج} & \text{ف} - \text{گ} - \text{ھ} & \text{ا} - \text{ب} - \text{ھ} \end{vmatrix}$$



اب چونکہ صفوں اور ستونوں دونوں کو الٹی ترتیب میں لکھنے سے مقطع نہیں بدلتا اسلئے اگر مقطع کا پھیلاؤ آخری صف اور آخری ستون کی رقوم میں مطلوب ہو (جیسا کہ اس مثال میں) تو یہ ضروری نہیں کہ ان کو پہلی صف اور پہلے ستون کے مقامات میں منتقل کر دیا جائے۔ مقطع جس شکل میں دیا گیا ہے اسی شکل میں اسکو پھیلا یا۔ سلتا ہے بشرطیکہ دفعہ ۱۳ء کے قاعدہ میں صدر عنصر اور اسکے صغیر کی جائے علی الترتیب آخری و دہری عنصر اور اس کے متمم صغیر لکھ دیا جائے۔

۴۔ اوپر کی مثال ۲ کے مقطع ۵ کو دفعہ ۱۳ء کے طریقہ سے آخری صف اور آخری ستون کی رقوم میں پھیلاؤ۔

مثال ۳ کے آخری نوٹ کو مد نظر رکھنے اور (ب، ج، ف، گ) سے انہی مقداروں کو تیسرے کرنے سے جو امثلہ ۱ اور ۳ میں کی گئی تھیں نتیجہ کو شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:-

۱ ۵ گ  
د = ۵ | ۵ ب ف | ۱ ل - ب م - ج ن - ۲ ف م  
گ ف ج | ۲ گ ن ل - ۲ ل م  
جب کسی رتبہ کے متشکل مقطع کو متشکل ماشیہ (یعنی آفتاب اور امتصا یا وہی عناصر ہوں) لگایا جاتا ہے تو نتیجہ صریحاً ایک متشکل مقطع ہوگا جسکا رتبہ دئے ہوئے مقطع کے رتبہ سے بقدر ایک کے بڑا ہوگا۔ دفعہ ۱۳ء کے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ عام طور پر ماشیہ لگائے ہوئے مقطع کے پھیلاؤ میں ابتدائی مقطع اضافہ کردہ صف اور ستون میں جو عنصر مشترک ہے اس سے ضرب دینے کے بعد داخل ہوتا ہے اور اسکے ساتھ باقی اضافہ کردہ عناصر کا ایک دو درجی ہندسات تفاعل۔

۵۔  
۱ ۵ گ  
گ ف ج | ۲ گ ن ل - ۲ ل م  
ل م ج | ۲ گ ن ل - ۲ ل م  
۱ ۵ گ  
گ ف ج | ۲ گ ن ل - ۲ ل م  
ل م ج | ۲ گ ن ل - ۲ ل م

کو پھیلاؤ۔ ظاہر ہے کہ مثال ۲ کے مقطع کو متشاکل حاشیہ لگانے سے یہ مقطع پیدا ہوا ہے جس میں جمع کردہ خطوط کا مشترک عنصر صفر ہے۔ نتیجہ صریحاً یہ ہے کہ 'ضہ' کا ایک دودرجی متجانس تفاعل ہے اور مثال ۲ کی ترقیم کی مدد سے -  
۵ کی قیمت فوراً شکل ذیل میں لکھی جاسکتی ہے:-

$$\begin{aligned} & \text{ا} + \text{ع} + \text{ج} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \text{ض} + \text{ف} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ا} + \text{ع} + \text{د} + \text{ا} + \text{ع} + \text{ب} \\ & + \text{ا} + \text{ع} + \text{د} + \text{ا} + \text{ع} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \text{ض} + \text{ف} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ا} + \text{ع} + \text{د} + \text{ا} + \text{ع} + \text{ب} \end{aligned}$$

۶۔ دفعہ ۱۴۱ کے مسئلہ کے ذریعہ ثابت کرو کہ کسی مقطع کا مربع ایک متشاکل مقطع ہوتا ہے۔  
۷۔ دو متشاکل مقطعوں کا حاصل ضرب ابتدائی مقطعوں کے حاصل ضرب کا متشاکل مقطع ہوتا ہے۔

#### ۱۴۸۔ معوج متشاکل اور معوج مقطعات۔ معوج متشاکل

مقطع وہ ہے جس میں ہر عنصر اپنے مزدوج کے مساوی مگر علامت میں مختلف ہو۔ اب چونکہ ہر مزدوج عناصر اپنا آپ مزدوج ہوتا ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایسے مقطع میں تمام مزدوج عناصر صفر ہیں وہ مقطع جس میں تمام عناصر سوائے مزدوجوں کے اپنے مزدوجوں کے مساوی اور علامت میں مختلف ہوں معوج مقطع ہے۔ پس معوج متشاکل مقطع مفروضہ تری ہے اور معوج مقطع میں وٹری عناصر موجود ہوتے ہیں۔ دفعہ ۱۳۶ کے طریقہ سے معوج مقطعوں کو پھیلاؤ معوج متشاکل مقطعوں کے پھیلاؤ پر منحصر کیا جاسکتا ہے۔

اس دفعہ کا بقیہ حصہ معوج متشاکل مقطعوں کے بعض مفید خواص ثابت کرنے میں استعمال کیا جائیگا۔

(۱) طاق رتبہ کا معوج متشاکل مقطع معدوم ہوتا ہے۔  
کیونکہ کسی معوج متشاکل مقطع ۵ کی قیمت نہیں بدلتی اگر ستونوں کو صفوں میں بدل دیا جائے اور پھر تمام صفوں کی علامتیں بدل دی جائیں۔



لیکن جب مقطع کا رتبہ طاق ہو تو اس عمل سے  $\Delta$  کی علامت بدلتی چاہئے۔ پس اس صورت میں  $\Delta$  معدوم ہو جاتا ہے۔ مثلاً

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 1$$

(۲) ان میں رتبہ کے معوج متشکل مقطع کا متشکل مقطع ایک متشکل مقطع ہو گا جب ان طاق ہو اور ایک معوج متشکل مقطع جب ان جفت ہو۔

کسی معوج متشکل مقطع میں دو عنصروں کے ایک جوڑے کے جواب میں جو صغیر ہوتے ہیں وہ صرف صفوں اور ستونوں کے باہمی تبادلاً اور تمام عنصروں کی علامتوں کے ذریعے متفق ہوتے ہیں۔ پس دونوں صغیر مساوی ہیں جب ان کا رتبہ جفت ہو یعنی جب ان طاق ہو اور دونوں مساوی مگر علامت میں مختلف ہیں جب ان جفت ہو۔ اس لئے پہلی صورت میں متشکل مقطع متشکل ہے اور دوسری صورت میں معوج متشکل کیونکہ اس کے صدر دوسری عنصر سب کے سب طاق رتبہ کے معوج متشکل مقطعات ہیں۔

(۳) جفت رتبہ کا معوج متشکل مقطع ایک مکمل مربع ہوتا ہے۔

یہ ان اصولوں سے ثابت ہوتا ہے جو دفعہ ۱۴۶ میں بیان ہوئے ہیں۔ مثلاً چونکہ رتبہ کا مقطع

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 1$$

لو اور فرض کرو کہ اس کے متشکل مقطع کے عناصر 'ا'، 'ب'، 'ج' وغیرہ

سے تعبیر ہوتے ہیں۔ تب دفعہ ۱۴۶ (۲) کی رو سے

$$\Delta^1 \text{ ب} - \Delta^1 \text{ ب} = \Delta^1 \text{ ف} \quad | \quad \Delta^1 \text{ ف} = \Delta^1 \text{ ف}$$

اب چونکہ  $\Delta^1$  اور  $\Delta^1$  طاق رتبہ کے معوج متشاکل مقطعات ہیں وہ معدوم ہو جاتے ہیں اور  $\Delta^1 = \Delta^1$ ۔ ب کیونکہ یہ مزدوج صغیر ہیں۔ پس  $\Delta^1 \text{ ف} = \Delta^1$  جو اس بات کو ثابت کرتا ہے کہ  $\Delta^1$  ایک کامل مربع ہے۔ اسی طرح چھٹے رتبہ کے مقطع  $\Delta^2$  کے لئے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ  $\Delta^2$  اور چوتھے رتبہ کے ایک معوج متشاکل مقطع کا حاصل ضرب ایک کامل مربع ہے اور چونکہ یہ آخری مقطع بموجب ثبوت بالا ایک کامل مربع ہے اسلئے  $\Delta^2$  بھی ایک کامل مربع ہے۔ چھٹے رتبہ کے مقطع کے لئے اس مسئلہ کی صداقت ثابت کرنے کے بعد بالکل اسی طرح کے عمل سے آٹھویں رتبہ کے مقطع کے لئے اسکو ثابت کیا جاسکتا ہے اور علی ہذا۔

## مثالیں

۱۔ چوتھے رتبہ کے معوج متشاکل مقطع کے لئے ذیل کے جملہ کی تصدیق کرو۔

$$\Delta^4 \text{ (ا ف - ب ع + ج د)} = \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} & \text{د} \\ \text{ع} & \text{د} & \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ف} & \text{ا} & \text{د} & \text{ب} \\ \text{د} & \text{ب} & \text{ع} & \text{ف} \end{vmatrix} \quad \text{۲۔ معوج مقطع}$$

$$\Delta^5 = \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} & \text{لا} & \text{د} \\ \text{ع} & \text{د} & \text{ا} & \text{لا} & \text{ب} \\ \text{ف} & \text{ا} & \text{د} & \text{ب} & \text{ع} \\ \text{لا} & \text{ب} & \text{ع} & \text{ف} & \text{ا} \end{vmatrix}$$





اس مجموعہ متشاکل مقطع کی قیمت مثال ۱ کے نتیجہ کی مدد سے لکھ لیا جاسکتی ہے۔ چنانچہ اسکی تصدیق فوراً ہو جاتی ہے کہ

$$\Delta = (1 \text{ ف} - 2 \text{ ب} + 3 \text{ ع} + 4 \text{ د})^2 \text{ فہ}^2 = 2 \Delta$$

۷۔ مثال ۳ کے مقطع میں تمام صدر عناصر کو صفر بنانے سے پانچویں رتبہ کا جو مجموعہ متشاکل مقطع حاصل ہوتا ہے اسکا متشاکل مقطع معلوم کرو۔

اب چونکہ متشاکل مقطع ایک متشاکل مقطع ہے (دیکھو دفعہ ۱۲۸) اور پھر چونکہ یہ ایسا مقطع بھی ہے جس میں کسی خط کے عناصر کسی متوازی خط کے عناصر کے متناسب ہیں (دفعہ ۱۲۶) اس لئے مطلوبہ مقطع شکل ذیل کا ہونا چاہئے :-

فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ
فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ
فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ
فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ
فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ	فہ

جس میں فہ، فہ، فہ، فہ، فہ، فہ، فہ، فہ ابتدائی عنصروں میں دوسرے درجہ کے پانچ تفاعل ہیں جنکے مربع ان پانچ پہلے صغیروں کی قیمتیں ہیں جو  $\Delta$  کے صدر عناصر کے متمم ہیں۔

عام صورت میں کسی طاق رتبہ  $(2m+1)$  کے ایک مجموعہ متشاکل مقطع کا متشاکل مقطع مندرجہ بالا شکل کے مشابہ ہوتا ہے جس میں وتری عناصر  $(2m+1)$  تفاعلوں کے جنہیں سے ہر ایک ابتدائی عنصروں میں  $m$  درجہ کا تفاعل ہے مربع میں اور بقیہ عناصر دو دو کے

حاصل ضرب ہیں۔ مسئلہ۔ اس باب کو ختم کرنے سے پہلے ہم ایک اہم مسئلہ بیان کرتے ہیں جو اس مقطع سے متعلق ہے جس کا صدر پہلا صغیر معدوم ہوتا ہے۔ دفعہ ۱۳ کی ترقیم اختیار کر کے ہم  $\Delta$  کو ایک معدوم ہونے والا مقطع سمجھتے ہیں اور ثابت شدہ مسئلہ کو یوں بیان کرتے ہیں۔ اگر ایک مقطع  $\Delta$  کو جس کی قیمت صفر ہے کسی طرح نسبت پر ماحشیہ لگائیں تو اس طرح پر بنے ہوئے مقطع  $\Delta$  کے صدر پہلے صغیر کا حاصل ضرب اصناف کردہ عناصر کے دو خطی متجانس تفاضلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

دفعہ ۱۳ کی ترقیم کو برقرار رکھ کر ہم یہ ثابت کر چکے کہ  $\Delta$  اور  $\Delta$  کا حاصل ضرب شکل ذیل میں بیان ہو سکتا ہے:-

$$\Delta = (\Delta + \beta + \gamma + \dots) (\Delta + \beta + \gamma + \dots)$$

یہ نتیجہ فوراً دفعہ (۴۶) کے ربط (۲) سے حاصل ہوتا ہے اگر  $\Delta$  کے متکافی مقطع میں ان عنصروں کی قیمتوں پر غور کیا جائے جو  $\Delta$  کے متکافی ہیں اور پھر ابتدائی عنصروں کی رقوم میں دوسرے رتبہ کا وہ مقطع بیان کیا جائے جو ان چار عناصر سے بنتا ہے اس نتیجہ کا دوسرا ثبوت آسانی کے ساتھ ایک منعدم مقطع کے متکافی کی خاصیت کی مدد سے (جو یہ ہے کہ  $\Delta + \beta + \gamma$  وغیرہ سے بننے والے مقطع میں کسی خط کے عناصر کسی متوازی خط کے عناصر کے متناسب ہوتے ہیں دفعہ ۱۲۶) دفعہ ۱۳ کی بموجب پھیلا کر اخذ کیا جاسکتا ہے۔

اگر مقطع  $\Delta$  متشاکل ہو اور اسکو لگایا ہوا ماحشیہ بھی متشاکل تو اوپر کی مساوات میں بائیں طرف کے دو اجزائے ضربی مماثل



یا ۵ = - (فم عہ + فم بہ + فم جہ + ....) (فم عہ + فم بہ + فم جہ + ....)  
 یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر اس نتیجہ میں عہ، بہ، جہ، وغیرہ کو - سے ضرب  
 - بہ، - جہ، وغیرہ کے مساوی بنایا جائے تو دفعہ ۴م مسئلہ ۳ حاصل ہو جائے گا۔  
 ۲۔ اگر حرفتہ ۲م کے ایک معوج متشکل مقطع کو کسی طریقہ پر  
 حاشیہ لگایا جائے تو حاصل شدہ مقطع دو منطق تعاملوں کے حاصل ضرب  
 کے مساوی ہوتا ہے جنہیں سے ایک عامل غاصر میں م ہیں درجہ کا ہے  
 اور دوسرا (م + ا) ہیں درجہ کا۔

اس کو پچھلی مثال سے سانی کے ساتھ اندکیا جاسکتا ہے اگر ہم  
 اس میں پہلے ستون کے اضافہ کردہ تمام عنصروں کو یعنی عہ، بہ، جہ،  
 وغیرہ کو صفر بنادیں اور صرف آخری عنصر کو = ۱ رکھیں۔ تب مقطع  
 زیر بحث صورت میں تحویل ہو جائیگا جس میں اوپری صف اور آخری  
 ستون حاشیہ میں داخل ہونگے۔ نیز یہ معلوم ہوگا کہ نتیجہ میں م ہیں درجہ  
 کا جزو ضربی ۲ م ہیں۔ تہ کے دئے ہوئے معوج متشکل مقطع کا  
 جذر المربع ہے۔

۳۔ ثنابت کرو

	عہ	بہ	جہ	
عہ	۰	ج	- ب	
بہ	ج	۰	۱	
جہ	ب	۱	۰	

۴۔ مقطع

عہ	۰	عہ	بہ	جہ	ضہ
عہ	۰	ج	- ب	لا	
بہ	ج	۰	۱	ما	
جہ	ب	۱	۰	می	
ضہ	لا	ما	- می	-	



ہو جاتے ہیں اور مسئلہ شکل ذیل اختیار کرتا ہے:- اگر ایک  
متشاکل مقطع کو جس کی قیمت صفر ہے متشاکل حاشیہ لگایا جائے  
تو اس طور پر بنے ہوئے مقطع اور اس کے صدر دوسرے  
صغیر کا حاصل ضرب اضافہ کردہ عناصر کے ایک خطی  
متجانس تفاعل کے نریج (منفی علامت کے ساتھ) کے مساوی  
ہوتا ہے۔

اصل مقطع کو  $\Delta$  سے تعبیر کیا جائے تو اوپر کے ثابت شدہ  
مسئلہ کو حسب ذیل مفید شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے:- اگر  
کسی متشاکل مقطع میں صدر پہلا صغیر معدوم ہو تو خود مقطع  
اور اس کا صدر دوسرا صغیر مختلف علامت ہوتے  
ہیں۔

## مثالیں

(51)

۱۔ اگر طاقی رتبہ  $(2m+1)$  کے ایک معوج متشاکل مقطع  $\Delta$  کو  
کسی طریقہ پر حاشیہ لگایا جائے تو حاصل شدہ مقطع  $\Delta$  دو منطق تفاعل  
حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے جنہیں ہر ایک میں اضافہ کردہ عناصر پہلی  
قوت میں اور ابتدائی عناصر میں قوت میں شامل ہوتے ہیں۔ مثال (۷)  
دئے ہوئے معوج متشاکل مقطع کے متکافی کو دفعہ ۸۴۸ مثال (۷)  
کے نتیجہ کی بموجب شکل



میں لکھنے اور دفعہ ہذا کا مسئلہ استعمال کرنے سے نہیں معلوم ہوگا

$$\Delta^2 = - (فہ^۱ + فہ^۲ + فہ^۳ + فہ^۴ + فہ^۵ + فہ^۶ + فہ^۷ + فہ^۸) (فہ^۱ + فہ^۲ + فہ^۳ + فہ^۴ + فہ^۵ + فہ^۶ + فہ^۷ + فہ^۸)$$

یا  $\Delta = - (فم\ عہ + فم\ بہ + فم\ جہ + فم\ جہ + \dots)$  (فم\ عہ + فم\ بہ + فم\ جہ + فم\ جہ +  $\dots$ )  
 یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر اس نتیجہ میں  $عہ$ ،  $بہ$ ،  $جہ$ ، وغیرہ کو  $-$  سے ضرب کیا جائے تو وہ  $۲۸$  مسئلہ ۳ حاصل ہو جائے گا۔  
 ۲۔ اگر حقیقت یہ  $۲۸$  کے ایک معوج متشاکل مقطع کو کسی طریقہ پر حاشیہ لگایا جائے تو حاصل شدہ مقطع دو منطق تفاعلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے جنہیں سے ایک تفاعل عناصر میں  $م$  میں درجہ کا ہے اور دوسرا  $(م + ۱)$  میں درجہ کا۔

اس کو پچھلی مثال سے آسانی کے ساتھ اخذ کیا جاسکتا ہے اگر ہم اس میں پہلے ستون کے اضافہ کردہ تمام غصروں کو یعنی  $عہ$ ،  $بہ$ ،  $جہ$  وغیرہ کو صفر بنادیں اور صرف آخری غصہ کو  $= ۱$  لکھیں۔ تب مقطع زیر بحث صورت میں تحویل ہو جائیگا جس میں اوپر کی صف اور آخری ستون حاشیہ میں داخل ہونگے۔ نیز یہ معلوم ہوگا کہ نتیجہ میں  $م$  میں درجہ کا جزو ضربی  $۲۸$  میں  $۲۸$  کے دے ہوئے معوج متشاکل مقطع کا جذر الطریق ہے۔

۳۔ ثنابت کرو

	عہ	بہ	جہ	
عہ	۰	ج	- ب	
بہ	- ج	۰	۱	
جہ	ب	- ۱	۰	

۴۔ مقطع

عہ	۰	عہ	بہ	جہ	ضہ
عہ	۰	ج	- ب	لا	
بہ	- ج	۰	۱	ما	
جہ	ب	- ۱	۰	می	
ضہ	- لا	- ما	- می	-	

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

جواب :- (لا + ب + ما + ج ی) (لا + ب + جہ)  
 + (ما + جہ عہ) + (ی + عہ یہ) + (لا + عہ ضہ) + (ب + بہ ضہ)  
 + (ج + جہ ضہ)

## متفرق مثالیں

(52)

۱۔ ثابت کرو

$$ج = \begin{vmatrix} ل & ل & ل \\ ل & ل & ل \\ ل & ل & ل \end{vmatrix}$$

جہاں جے سے وہی مراد ہے جو عام طور پر لیا جاتی ہے۔  
 ۲۔ ثابت کرو

$$ج = \begin{vmatrix} ب + جہ & جہ + عہ & عہ + بہ \\ ب + جہ & جہ + عہ & عہ + بہ \\ ب + جہ & جہ + عہ & عہ + بہ \end{vmatrix}$$

۳۔ ثابت کرو

$$ج = \begin{vmatrix} ب + جہ & جہ + عہ & عہ + بہ \\ ب + جہ & جہ + عہ & عہ + بہ \\ ب + جہ & جہ + عہ & عہ + بہ \end{vmatrix}$$

جہاں بائیں طرف کے اجزائے ضربی دوسرے رتبہ کے مقطعات ہیں۔  
 صفوں کو ب + جہ، جہ + عہ، عہ + بہ سے تقسیم کرنے اور

ل = عہ، م = ب، ن = جہ رکھنے سے مقطع (ایک جزو ضربی  
 ترک کرنے سے) شکل ذیل میں تحویل ہو جاتا ہے۔

$$\begin{vmatrix} | & \text{مہ} + \text{نہ} & \text{مہ نہ} & | \\ | & \text{نہ} + \text{لہ} & \text{نہ لہ} & | \\ | & \text{لہ} + \text{مہ} & \text{لہ مہ} & | \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} | & \text{مہ نہ} & \text{لہ نہ} & | \\ | & \text{نہ نہ} & \text{مہ نہ} & | \\ | & \text{لہ نہ} & \text{نہ نہ} & | \end{vmatrix} \equiv$$

۴۔ مقطع ذیل کی قیمت معلوم کرو :-

$$\begin{vmatrix} | & \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} & \text{بہ جہ} + \text{بہ ضہ} + \text{جہ ضہ} & \text{بہ جہ ضہ} & | \\ | & \text{عہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} & \text{عہ جہ} + \text{عہ ضہ} + \text{جہ ضہ} & \text{عہ جہ ضہ} & | \\ | & \text{عہ} + \text{بہ} + \text{ضہ} & \text{عہ بہ} + \text{عہ ضہ} + \text{بہ ضہ} & \text{عہ بہ ضہ} & | \\ | & \text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} & \text{عہ بہ} + \text{عہ جہ} + \text{بہ جہ} & \text{عہ بہ جہ} & | \end{vmatrix}$$

یہاں چونکہ دو حرفوں کا باہمی تبادلہ دو صفوں کو محاذی بنا دیگا اسلئے یہ مقطع چھ فرقوں کے حاصل ضرب سے صرف ایک عددی جزو ضربی کے لحاظ سے مختلف ہوگا۔ یا ہم اس مقطع کو آسانی کے ساتھ دفعہ ۱۳۲ مثال (۱۰) کی شکل میں تحویل کر سکتے ہیں۔ اس قسم کے کسی مقطع کی قیمت اسی طریقہ پر معلوم کیا جاسکتی ہے اور علامت کی تعیین دفعہ ۱۳۲ مثال ۹ کے طریقہ سے عمل میں آسکتی ہے۔

(58)

۵۔ ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} | & \text{بہ}^2 \text{جہ}^2 + \text{عہ}^2 \text{ضہ}^2 & \text{بہ جہ} + \text{عہ ضہ} & | \\ | & \text{جہ}^2 \text{عہ}^2 + \text{بہ}^2 \text{ضہ}^2 & \text{جہ عہ} + \text{بہ ضہ} & | \\ | & \text{عہ}^2 \text{بہ}^2 + \text{جہ}^2 \text{ضہ}^2 & \text{عہ بہ} + \text{جہ ضہ} & | \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} | & \text{بہ}^2 \text{جہ}^2 + \text{عہ}^2 \text{ضہ}^2 & \text{بہ جہ} + \text{عہ ضہ} & | \\ | & \text{جہ}^2 \text{عہ}^2 + \text{بہ}^2 \text{ضہ}^2 & \text{جہ عہ} + \text{بہ ضہ} & | \\ | & \text{عہ}^2 \text{بہ}^2 + \text{جہ}^2 \text{ضہ}^2 & \text{عہ بہ} + \text{جہ ضہ} & | \end{vmatrix}$$

آخری ستون کو ۲ عہ بہ جہ ضہ سے ضرب دو اور پہلے ستون میں جمع کرو۔ تب مقطع دفعہ ۱۳۲ مثال ۹ کی شکل کا ہو جاتا ہے۔

۶۔ ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} (ب + ج - ع - ض) & (ب + ج - ع - ض) & (ب + ج - ع - ض) \\ (ج + ع - ب - ض) & (ج + ع - ب - ض) & (ج + ع - ب - ض) \\ (ع + ب - ج - ض) & (ع + ب - ج - ض) & (ع + ب - ج - ض) \end{vmatrix} \\ \equiv ۶۴ (ب - ج) (ع - ض) (ج - ع) (ب - ض) (ع - ب) (ج - ض) \\ \text{۷۔ ثابت کرو}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ب & ۱ + لا + ب \\ ب & ج & ب + لا + ج \\ ۱ + لا + ب & ب + لا + ج & . \end{vmatrix} \equiv - (۱ + ج - ب) (۱ + لا + ب + لا + ج) \\ \text{پہلی صف کو لا سے ضرب دو اور پھر اسکے اور دوسری صف کے} \\ \text{مجموعہ کو تیسری صف میں سے تفریق کرو۔} \\ \text{۸۔ اسی طرح ثابت کرو}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ب & ۱ + لا + ب \\ ب & ج & ب + لا + ج \\ ج & د & ج + لا + د \\ ۱ + لا + ب + لا + ج & ب + لا + ج + لا + د & ج + لا + د + لا + ع \end{vmatrix} \\ \equiv - \begin{vmatrix} ۱ & ب & ج \\ ب & ج & د \\ ج & د & ع \end{vmatrix} (۱ + لا + ب + لا + ج + لا + د + لا + ع) \\ \text{۹۔ اگر}$$

$$\begin{aligned} \text{ف، (لا)} &= ۱ + لا + ۳ + ب + لا + ۳ + ج + لا + د \\ \text{ف، (لا)} &= ۱ + لا + ۳ + ب + لا + ۳ + ج + لا + د \\ \text{ف، (لا)} &= ۱ + لا + ۳ + ب + لا + ۳ + ج + لا + د \end{aligned}$$

ثابت کرو





(55)

۱۲۔ ثابت کرو

$$\frac{(ب ج) (ا د) (ج ا) (ب د) (ا ب) (ج د)}{ا ب ج د ا ب ج د} = \begin{vmatrix} ۱ & ب & ج & د \\ ۱ & ب & ج & د \\ ۱ & ب & ج & د \\ ۱ & ب & ج & د \\ ۱ & ب & ج & د \\ ۱ & ب & ج & د \end{vmatrix}$$

۱۳۔ متماثلات ذیل کو ثابت کرو

$$\begin{vmatrix} ۱ & ع & ع & ع \\ ۱ & ب & ب & ب \\ ۱ & ج & ج & ج \\ ۱ & ض & ض & ض \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ب & ج & ا \\ ۱ & ب & ج & ا \\ ۱ & ب & ج & ا \\ ۱ & ب & ج & ا \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ب & ج & ا \\ ۱ & ب & ج & ا \\ ۱ & ب & ج & ا \\ ۱ & ب & ج & ا \end{vmatrix}$$

جہاں

ا = (ب - ج) (ع - ض) = ب = (ج - ع) (ب - ض) = ج = (ع - ب) (ج - ض)  
 ا = (ب - ج) (ع - ض) = ب = (ج - ع) (ب - ض) = ج = (ع - ب) (ج - ض)  
 پہلے مقطع کو پہلے دو ستونوں سے بننے والے صغیروں کی رقوم میں  
 (دیکھو دفعہ ۱۲۵) پھیلا کر ہم آسانی کے ساتھ ثابت کرتے ہیں کہ یہ مقطع

$$ا (ب ج + ع ض) + ب (ج ع + ب ض) + ج (ع ب + ج ض)$$

کے مساوی ہے اور پھر متماثلہ مساوات ا + ب + ج = کو دفعہ ۲۰ مثال  
 ۱۸ کے رشتوں کے ساتھ استعمال کرنے سے نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ مثال ۱۳ کا مقطع حسب ذیل مقطع کے مساوی ہے۔

$$\begin{vmatrix} ۱ & ب ج + ع ض & ب ج + ع ض & ب ج + ع ض \\ ۱ & ج ع + ب ض & ج ع + ب ض & ج ع + ب ض \\ ۱ & ع ب + ج ض & ع ب + ج ض & ع ب + ج ض \end{vmatrix}$$



یہ نتیجہ دفعہ ۲، مثال ۱۸ کے رشتوں سے فوراً حاصل ہوتا ہے۔  
اگر نتیجہ میں 'عہ'، 'بہ'، 'جہ'، 'ضہ' کو 'عہ'، 'بہ'، 'جہ'، 'ضہ' کے مساوی  
رکھا جائے تو ایک متماثلہ مساوات حاصل ہوگی جسکی ایک مخصوص  
صورت مثال ۵ ہے۔

۱۵۔ حسب ذیل مقطع کو فرقوں کے تفاعل کے طور پر بیان کرو  
جسکا معدوم ہونا اس شرط کو تعبیر کرتا ہے جو ایک خط پر چھ نقطوں کے  
درتج کے لئے ہے۔

$$\begin{vmatrix} 1 & عہ + عہ & عہ \\ 1 & بہ + بہ & بہ \\ 1 & جہ + جہ & جہ \end{vmatrix} \equiv \Delta$$

مقطع کو

$$\begin{vmatrix} عہ^2 & - عہ & 1 \\ بہ^2 & - بہ & 1 \\ جہ^2 & - جہ & 1 \end{vmatrix}$$

سے ضرب دینے اور پھر مساوات کی دونوں طرفوں سے جزو ضربی  
(بہ - جہ) (جہ - عہ) (عہ - بہ) جدا کرنے سے  $\Delta$  کی قیمت کو  
آسانی کے ساتھ یوں بیان کیا جاسکتا ہے:

(56)

$$\Delta \equiv (عہ - بہ) (بہ - جہ) (جہ - عہ) + (عہ - بہ) (بہ - جہ) (جہ - عہ)$$

اس نتیجہ کو مثال ۱۳ کے مقطع سے بھی جسکا معدوم ہونا چار نقطوں  
کے دو جٹوں کے درمیان عام ہم رسم ربط کو بیان کرتا ہے اخذ کیا جاسکتا  
۱۶۔ مقطع ذیل کو پھیلاؤ:-

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$



اور ان دو مقطعوں کو دفعہ ۱۳۲ مثال ۹ کی طرح اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

۱۹- مقطع

(57)

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline (ع - ع) & (ع - ب) & (ع - ج) \\ \hline (ب - ع) & (ب - ب) & (ب - ج) \\ \hline (ج - ع) & (ج - ب) & (ج - ج) \\ \hline \end{array} \equiv \Delta$$

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

دو مستطیلی آراستوں

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} ۱ - ۳ ع - ۳ ع \\ ۱ - ۳ ب - ۳ ب \\ ۱ - ۳ ج - ۳ ج \end{array} \right. (۱) \quad \left\{ \begin{array}{l} ۱ ع - ۲ ع \\ ۱ ب - ۲ ب \\ ۱ ج - ۲ ج \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} ۱ - ۳ ع - ۲ ع \\ ۱ - ۳ ب - ۲ ب \\ ۱ - ۳ ج - ۲ ج \end{array} \right. (۲) \end{array}$$

کو ضرب دینے سے  $\Delta$  چار قسموں کے مجموعہ کے مساوی ہو جاتا ہے جنہیں سے ہر ایک میں سے ہم دو مقطعوں

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ ع - ۲ ع & ۱ ب - ۲ ب & ۱ ج - ۲ ج \\ \hline ۱ ع - ۲ ع & ۱ ب - ۲ ب & ۱ ج - ۲ ج \\ \hline ۱ ع - ۲ ع & ۱ ب - ۲ ب & ۱ ج - ۲ ج \\ \hline \end{array}$$

کے حاصل ضرب کو ایک جزو ضربی کے طور پر نکال سکتے ہیں۔ یقینہ جزو ضربی ہوگا

$$\{ ۳ ع - ۳ ب - ۳ ج - ۳ ع + ۳ ب - ۳ ج - ۳ ع - ۳ ب - ۳ ج \}$$

جس کو شکل

$$\{ ۳ (ع - ع) (ب - ب) (ج - ج) + (ع - ع) (ب - ب) (ج - ج) + (ع - ع) (ب - ب) (ج - ج) + (ع - ع) (ب - ب) (ج - ج) \}$$

میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

۲۰- ذیل کے پھیلاؤ کو ثابت کرو:-

$$\left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right\} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

پہلے ستون کو باقی دو سرے ہر ستون میں سے تفریق کرنے اور پھر مقطع کو پہلے ستون کے عناصر کے ایک خطی تفاعل کے طور پر بیان کرنے سے یہ پھیلاؤ آسانی کے ساتھ ثابت ہو جاتا ہے۔ ثبوت کی قیمت سے یہ واضح ہو جائیگا کہ ن دیں رتبہ کے متناظر مقطع کی قیمت

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

۲۱۔ ذیل کے ربط کو ثابت کرو:-

$$= \begin{vmatrix} \text{لا} & \text{لا} & \text{لا} & \text{ع} \\ \text{لا} & \text{لا} & \text{یہ} & \text{لا} \\ \text{لا} & \text{جہ} & \text{لا} & \text{لا} \\ \text{ضہ} & \text{لا} & \text{لا} & \text{لا} \end{vmatrix}$$

جہاں

(58) ف (لا) ≡ (لا-ع) (لا-یہ) (لا-جہ) (لا-ضہ)  
اسکو پچھلی مثال سے اخذ کیا جاسکتا ہے یا بلا واسطہ اسی طریقہ پر ثابت کیا جاسکتا ہے۔ پچھلی مثال کی طرح یہاں بھی ن دیں رتبہ کا اس شکل کا مقطع متنظر شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۲۲۔ کسی مساوات کے سروں میں سے ہر ایک سر دو مقطعات کے خارج قسمت کے طور پر اصولوں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔  
تیسرے درجہ کی مساوات کے لئے ذیل کا جو طریق عمل درج ہے اسکی توسیع کسی درجہ کی مساوات کے لئے آسانی کے ساتھ کیجا سکتی ہے۔  
مثال ۱۰ دفعہ ۱۳۲ کی رو سے

لا	لا	لا	لا
ع	ع	ع	ع
(ج-ع)	(ج-ع)	(ج-ع)	(ج-ع)
(ل-ع)	(ل-ع)	(ل-ع)	(ل-ع)
(ج-ل)	(ج-ل)	(ج-ل)	(ج-ل)





ف (ع) ف (ع) ف (ع) ف (ع) ف (ع)  
 ف (ب) ف (ب) ف (ب) ف (ب) ف (ب)  
 ف (ج) ف (ج) ف (ج) ف (ج) ف (ج)  
 میں جس میں ف، ف، ف، ف، ف کوئی مشتق صحیح تفاعل ہیں ایک جزو ضربی  
 (ب - ج) (ج - ع) (ع - ی) شامل ہے۔

یہ اسی طرح کے استدلال سے حاصل ہو جاتا ہے جو مثال ۲۹  
 میں کیا گیا ہے۔ اس نوعیت کے مقصد منہر کسی ستون (یا صف) کے  
 عناصر ایک ہی شکل کے تفاعل ہوتے ہیں اور کسی صف (ستون) کے  
 عناصر میں ایک ہی مقدار شامل ہوتی ہے متبادلات (Alternants) کہلاتے ہیں  
 ظاہر ہے کہ یہ نتیجہ عام ہے اور کسی رتبہ کے متبادلات میں شامل  
 ہونیوالی سب مقداروں کے فرقوں کا حاصل ضرب ایک جزو ضربی کے طور پر  
 شامل ہوتا ہے۔ دفعہ ۱۳۲ کے امثلہ ۹، ۱۰ اور دفعہ ۱۳۰ کے امثلہ ۱۱، ۱۲  
 سادہ ترین شکل کے متبادلات ہیں۔

۳۲۔ پہلی مثال کے متبادلات کے فرقوں کے حاصل ضرب سے  
 تقسیم کر کے خارج قسمت کو ایک مقطع کا شکل میں بیان کرو۔  
 نوجہ کو قائم کرنے کی خاطر مان لو کہ شامل ہونیوالے تفاعلوں میں  
 سے ہر ایک تفاعل پانچویں درجہ کا ہے تو ہم کہہ سکتے ہیں

$$\begin{aligned} \text{ف (ع)} &= \text{ل} + \text{ع} + \text{ب} + \text{ع} + \text{ج} + \text{ع} + \text{د} + \text{ع} + \text{ع} + \text{ع} + \text{ک} \\ \text{ف (ب)} &= \text{ل} + \text{ع} + \text{ب} + \text{ع} + \text{ج} + \text{ع} + \text{د} + \text{ع} + \text{ع} + \text{ع} + \text{ک} \\ \text{ف (ج)} &= \text{ل} + \text{ع} + \text{ب} + \text{ع} + \text{ج} + \text{ع} + \text{د} + \text{ع} + \text{ع} + \text{ع} + \text{ک} \end{aligned}$$

اب مساوات

$$\text{ل} + \text{ف} + \text{ل} + \text{ق} + \text{ل} + \text{ر} =$$

کی اصلوں کو ع، ب، ج، د، ع، ک لینے اور مقطعوں



[illegible]

کا حاصل ضرب بنانے سے یہ فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ یہ آخری مقطع  
مطلوبہ خارج قسمت ہے۔

جب متبادلہ کسی زنجیر کا ہو اور ف، فہ، فہ، وغیرہ کسی چیز کے منطق صحیح تفاعل ہوں تو بالکل ایسا ہی طریقہ خارج قسمت کے معلوم کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔

۳۳۔ حسب ذیل منقطع کو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو:-

۵۱	۴۱	۳۱	۲۱	۱۱
۴۱	۳۱	۲۱	۱۱	۵۱
۳۱	۲۱	۱۱	۵۱	۴۱
۲۱	۱۱	۵۱	۴۱	۳۱
۱۱	۵۱	۴۱	۳۱	۲۱

سب صفوں میں عناصر وہی پانچ مقداریں ہیں جو دائری ترتیب میں لی گئی ہیں، ہر صف میں پہلا عنصر مختلف ہے۔ اس قسم کے مقطع کو ہم



محسوب کرو جس میں تمام عناصر صفر ہیں سوائے اُن کے جو وتر اور اُن خطوط میں واقع ہیں جو وتر کے دونوں طرف اس کے متوازی اور اس کے متصل ہیں۔ انہیں سے ایک خط ایسے عناصر پر مشتمل ہے جنہیں سے ہر ایک

۱۔ کے مساوی ہے۔  
پہلے ستون کی رقوم میں پھیلانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ زیر بحث مقطع کی قسم کے تین مقطعوں میں جنکے رتبے 'ن'، 'ن-۱'، 'ن-۲' ہیں لیکن رشتہ ہے:-

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}$$

اس رشتہ کی مدد سے سلسلہ  $\Delta_n, \Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \dots, \Delta_1$  میں کسی مقطع کو اس سے نچلے رتبہ کے دو مقطعوں میں تحول کیا جاسکتا ہے اور ظاہر ہے کہ  $\Delta_1$  اور  $\Delta_2$  کی قیمتیں صریحاً  $\Delta_1$  اور  $\Delta_2 + \Delta_1$  ہیں۔ اوپر کی مسادات کو  $\Delta_{n-1}$  سے تقسیم کیا جائے تو

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = 1 + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}}$$

پھر  $\Delta_{n-1}$  کو  $\Delta_{n-2}$  سے تقسیم کرنے پر جو خارج قسمت ملتا ہے اسکی بجائے اسی طرح کی قیمت درج کی جائے اور اس عمل کو جاری رکھا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ کسی مقطع کو اس سے عین نچلے رتبہ کے مقطع سے تقسیم کرنا جو خارج قسمت ملتا ہے وہ دئے ہوئے عناصر کی رقوم میں ایک مسلسل کسر کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ اس خاصیت کی بناء پر زیر بحث شکل کے مقطعوں کو ہم مسلسلالت کہیں گے۔ جب عناصر  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  (جو وتر کے اوپر والے خط میں آتے ہیں)

۳۶۔  $n$  دیں رتبہ کے مقطع کے مساوی ہو تو حاصل ہونیوالا مقطع سادہ سلسلہ ہے۔

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

کو محسوب کر دیجئے وہ عناصر جو صفر نہیں ہوتے صرف  $۱$  ہیں جو  $n$  دہراور اسکے متصل اور متوازی خطوط میں واقع ہوتے ہیں جیسا کہ اوپر بتایا گیا۔  
 $n$  کی کسی مخصوص قیمت کے لئے مقطع کو کچھلی مثال کے طریقہ کی بموجب مساوات

$$\Delta_n = ۱ - \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

کی مدد سے فوراً محسوب کیا جاسکتا ہے۔ یہاں  $\Delta_1$  اور  $\Delta_2$  کی قیمتیں علی الترتیب

$\Delta_1 = ۱$  اور  $\Delta_2 = ۱$  ہیں۔  
 $\Delta_n$  کی متواتر قیمتوں کی ساخت پر غور کرنے سے طالب علم کو فوراً معلوم ہو جائیگا کہ نتیجہ میں شامل ہونیوالی ارقام جبکہ  $n$  جفت اور  $۲$  کے مساوی ہو یہ ہیں

$$۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰, \dots$$

اگر  $n$  طاق اور  $۱+۲$  کے مساوی ہے تو ارقام ہیں

$$۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰, \dots$$

آئندہ تحقیقات کے لئے جنہیں متذکرہ صدر تالیف سے فائدہ اٹھایا جائیگا یہ ضروری نہیں ہے کہ ان جملوں میں داخل ہونیوالے عددی سروں کی غام شکلوں سے واقفیت حاصل کی جائے۔ لیکن ایسی اشکال بغیر وقت کے

معلوم کیجا سکتی ہیں اور  $\Delta_n$  کے لئے حسب ذیل عام جملہ حاصل کیا جاسکتا ہے:-

$$\Delta_n = \frac{n}{n-1} - \frac{n}{n-2} + \frac{n}{n-3} - \frac{n}{n-4} + \dots + \frac{n}{n-2} - \frac{n}{n-1}$$

$$= \frac{n}{n-1} - \frac{n}{n-2} + \frac{n}{n-3} - \frac{n}{n-4} + \dots + \frac{n}{n-2} - \frac{n}{n-1}$$

۳۷۔ اگر ایک کثیر الارقام  $3 \times 2 \times 1$  کو کمترین اعداد کے دوسرے کثیر الارقام  $n$  سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت کے اور باقی کے سروں کو  $n$  اور  $n-1$  کے سروں کی رقوم میں مقطعات کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔  
ذیل کی مخصوص صورت میں جو طریقہ استعمال کیا گیا ہے وہ عام صورت میں بھی آسانی کے ساتھ اطلاق پذیر ہے۔ فرض کرو کہ  $n$  پانچویں درجہ کا ہے اور  $n-1$  تیسرے درجہ کا۔ خارج قسمت اور باقی کو حسب ذیل شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے:-

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

سے ہمیں حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں:-

$$Q_1 = Q_1$$

$$Q_2 = Q_2 + Q_1$$

$$Q_3 = Q_3 + Q_2 + Q_1$$

$$Q_4 = Q_4 + Q_3 + Q_2 + Q_1$$

$$Q_5 = Q_5 + Q_4 + Q_3 + Q_2 + Q_1$$

$$Q_6 = Q_6 + Q_5 + Q_4 + Q_3 + Q_2 + Q_1$$

$$Q_7 = Q_7 + Q_6 + Q_5 + Q_4 + Q_3 + Q_2 + Q_1$$





$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 1 + لا \\ ب + لا ف \\ ف ج + لا \end{array} & \begin{array}{c} گ \\ گ \\ گ \end{array} \\ \hline \end{array} \equiv \Delta$$

میں لکھا گیا ہے۔

فرض کرو کہ پہلی صف اور پہلے ستون کو خارج کر دینے سے جو مقطع حاصل ہوتا ہے اسکو یعنی  $\Delta$  کے پہلے صدر صغیر کو  $\Delta_1$  سے تعبیر

کیا گیا ہے۔ اسی طرح  $\Delta_1$  کا پہلا صدر صغیر  $\Delta_2$  سے تعبیر ہوتا ہے اور  $\Delta_2$  کا پہلا صدر صغیر  $\Delta_3$  سے اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس طور پر حاصل

کردہ آخری تعامل  $\Delta_n$  ل + لا شکل کا ہو گا۔ ان مقطعوں کے ساتھ ہم ایک اور مقطع  $\Delta = 1$  لیتے ہیں جسکے متعلق یہ تصور کیا جا سکتا ہے کہ وہ صغیروں کے سلسلہ کو مکمل کرتا ہے اور اسی طرح کے عمل سے حاصل ہوا ہے کیونکہ  $\Delta_1$  کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی اگر ہم ایک صف اور ایک ستون کا ایسا حاشیہ لگا دیں جو بالکل صفر عنصروں پر مشتمل ہو سواے ایک عنصر + ۱ کے جو صدر وتر میں داخل ہوتا ہے۔ اب ہمیں  $n + 1$  تعاملوں کا یہ سلسلہ ملیگا

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n, \Delta_{n+1}$$

جسکے درجے (لا میں) لاحقوں سے تعبیر ہوتے ہیں۔ جب اس سلسلہ میں لا کی بجائے  $\infty$  درج کیا جاتا ہے تو علامتیں سب کی سب مثبت ملتی ہیں اور جب  $\infty$  درج کیا جاتا ہے تو علامتیں ( $\Delta$  سے شروع کر کے) متبادلاً مثبت اور منفی ہیں۔ پس اگر لا کو مسلسل بڑھاتا ہوا تصور کیا جائے تو لا کے  $\infty$  سے  $\infty$  تک جانے میں اس سلسلہ میں علامت کی



ن تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں۔ اب دفعہ ۱۴۹ کے مسئلہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ لا کی وہ قیمت جو اس سلسلہ کے کسی تفاعل کو ( $\Delta$ ) کو چھو کر (صفر بناتی ہے اس تفاعل کے دونوں طرف کے متصل تفاعلوں کو مختلف علامت کر دیتی ہے۔  $\Delta$  اپنی علامت برقرار رکھتا ہے۔ پس دفعہ ۹۶ (۲) کی طرح یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ علامت کی کوئی تبدیلی کم نہیں ہو سکتی سوائے اس صورت کے جب 'لا'  $\Delta$  = کی ایک حقیقی اصل میں سے گزرے۔ اسلئے اس مساوات کی ن حقیقی اصلیں موجود ہونی چاہئیں تاکہ  $-\infty$  سے  $+\infty$  تک

گزرنے میں علامت کی ن تبدیلیاں کم ہو سکیں۔ اس سلسلہ کی کوئی مساوات چونکہ اسی شکل کی ہے جو شکل کہ  $\Delta =$  کی ہے اس لئے اسکی تمام اصلیں حقیقی ہیں۔ نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ ان میں سے ہر مساوات (سلسلہ میں) اپنے سے اوپر کی مساوات کے حوالے سے ایک انتہائی مساوات ہے۔ کیونکہ  $\Delta$  کی ہر دو متصلہ اصلوں میں سے گزرنے میں  $\Delta$  اور  $\Delta$  کے درمیان علامت کی ایک تبدیلی کم ہونیکے لئے  $\Delta$  کی قیمت کو لا کی ان قیمتوں کے درمیان علامت بدلنی چاہئے۔

مساوات  $\Delta =$  میں مساوی اصلیں ہو سکتی ہیں اور جو کچھ اوپر ثابت ہوا اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب اس مساوات کی اصلیں  $\Delta$  کے مساوی ہوں تو مساوات  $\Delta =$  کی (۱-۱) اصلیں  $\Delta$  کے مساوی ہیں

مساوات  $\Delta =$  کی (۲-۲) اصلیں  $\Delta$  کے مساوی ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ یہ مقلع جبر بیان بحث کی گئی ہے نظری اور علی ریاضیات کی متعدد تحقیقاتوں میں واقع ہوتا ہے۔ زیر بحث اہم خاصیت کا جو ثبوت یہاں دیا گیا ہے وہ سامن (Salmon) کی Higher Algebra (دفعہ ۲۶) سے لیا گیا ہے

اور طالب علم کو اس مسئلہ کے دیگر ثبوتوں کے لئے اسکا حوالہ دیا جاتا ہے۔  
۲۰۔ اگر پچھلی مثال کے مقطع میں ۱ اصلیں عہ کے مساوی ہوں  
تو ثابت کرو کہ ہر پہلے صغیر میں (۱-۱) اصلیں عہ کے مساوی ہیں، ہر دوسرے  
صغیر میں (۲-۱) اصلیں عہ کے مساوی ہیں، اور علیٰ ہذا۔  
متکافی مقطع کے عناصر کے لئے ترقیم (۱) 'ھ' 'گ'..... استعمال  
کرنے سے ہمیں مساوات ملتی ہے

$$(ب-ھ) = ۲-۱$$

اب صفوں اور ستونوں کے مناسب انتقال کے ذریعہ یہ آسانی کیاتے  
دیکھ لیا جاسکتا ہے کہ ہر صدر پہلے صغیر میں ضعیفی اصل عہ، ۱-۱ مرتبہ  
شامل ہوتی ہے۔ اوپر لکھی ہوئی مساوات سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ صغیر ھ  
میں یہ اصل ۱-۱ مرتبہ شامل ہوتی چاہئے اور یہ ظاہر ہے کہ کسی پہلے  
صغیر کو تعبیر کرنے کے لئے ھ استعمال کیا جاسکتا ہے۔

۲۱۔ وہ شرطیں معلوم کرو کہ مساوات

$$\begin{vmatrix} ۱+لا & ھ & گ \\ ھ & ب+لا & ف \\ ۰ & ف & ج+لا \end{vmatrix}$$

میں مساوی اصلیں ہوں۔

چونکہ ہر پہلے صغیر میں دو پری اصل شامل ہونی چاہئے ہم نو درمطلوبہ  
شرطیں شکل ذیل میں اخذ کرتے ہیں:-

$$۱- \frac{گ}{ف} = ب - \frac{ھ}{گ} = ج - \frac{ف}{ج}$$

[یہ اور اس سے پہلے کی مثال راتو کی "Dynamics of a system of Rigid Bodies" حصہ دوم دفعہ ۶۱ سے لی گئی ہیں۔]

۲۲۔ کسی متشاکل مقطع کو اس طور پر بدلا جاسکتا ہے کہ مزدوج



عناصر میں موجود ہو چنانچہ پچھلی مثال کے طریق عمل کے بالکل مشابہ طریقہ سے یکے بعد دیگرے مزدوج عناصر کے تمام زوجوں میں سے لا کے سروں کو علیحدہ کیا جاسکتا ہے۔ اگر کوئی شدہ مقطع کے صدر عنصر میں لا کے سروں کی علامتیں سب کی سب وہی ہوں تو مثال ۳۹ کی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ متناظر مساوات کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہونگی۔

۴۴۔ فرض کرو کہ  $n$  دیں رتبہ کے ایک مقطع کو دو مستطیلی آراستوں میں تقسیم کیا گیا ہے ایک میں صفوں کی تعداد  $m$  ہے اور دوسرے میں  $n$  (جہاں  $m + n = n$ ) اور فرض کرو کہ مقطعات کو ضرب دینے میں جو عمل اختیار کیا جاتا ہے اسی عمل سے ان دو آراستوں سے حاصل ضربوں کے  $m$  نہ مجموعے بنائے گئے ہیں۔ تب اگر عناصر کے درمیان ایسے رشتے موجود ہوں کہ حاصل ضربوں کے یہ مجموعے علیحدہ علیحدہ معدوم ہوتے ہیں تو پہلے آراستے سے بننے والے  $m$  رتبے کے مقطعات دوسرے آراستے کے متمم عناصر سے بننے والے  $n$  رتبے کے مقطعات کے متناسب ہونگے۔

تفہیم کی خاطر ہم پانچویں رتبہ کا ایک مقطع لیتے ہیں لیکن ثبوت کا طرز بالکل عام ہے۔ فرض کرو کہ مقطع

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & f \\ c & d & e & f & g \\ d & e & f & g & h \\ e & f & g & h & i \end{vmatrix} = \Delta$$

(68) کو دو آراستوں میں تقسیم کر دیا گیا ہے ایک میں تین صف ہیں اور دوسرے میں دو۔ فرض کرو کہ حسب ذیل چار رشتے موجود ہیں:-

$$a = b, b = c, c = d, d = e, e = f, f = g, g = h, h = i$$

اب اگر  $\Delta$  کو لاپلاس کے مسئلہ سے پھیلا دیا جائے اور صغیر مقطعات اس طور پر لئے جائیں کہ پھیلاؤ میں داخل ہونیوالی علامتیں سب کی سب مثبت ہوں (اور یہ آسانی کے ساتھ کیا جاسکتا ہے) یعنی اگر پھیلاؤ

$$\Delta = (a_1 b_1 c_1 d_1) + (a_1 b_2 c_2 d_2) + (a_1 b_3 c_3 d_3) + (a_1 b_4 c_4 d_4) + \dots$$

ہو تو یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ تیسرے رتبہ کا ہر صغیر مقطع جو پہلے آرا سے سے بنتا ہے اس مقطع کے متناسب ہے جو مندرجہ بالا  $\Delta$  کے پھیلاؤ میں اس کے ساتھ جزو ضربی کے طور پر شریک ہے۔

سہولت سے مد نظر  $\Delta$  کے مندرجہ بالا پھیلاؤ کے لئے ہم ذیل کی ترقیم استعمال کرتے ہیں۔

$\Delta = (a_1 b_1 c_1 d_1) + (a_1 b_2 c_2 d_2) + (a_1 b_3 c_3 d_3) + (a_1 b_4 c_4 d_4) + \dots$   
مقطع  $\Delta$  کا مربع لینے، اوپر کے رشتوں کو استعمال کرتے اور ہر ترقیمی آرا سے کا جدید اگانہ طور پر مربع لینے سے جو مقطعات حاصل ہوں گی بجائے ان کی قیمتیں رکھنے اور اس طور پر حاصل کردہ  $\Delta$  کی دو قیمتوں کو مساوی رکھنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$(a_1 b_1 c_1 d_1) + (a_1 b_2 c_2 d_2) + (a_1 b_3 c_3 d_3) + (a_1 b_4 c_4 d_4) + \dots = (a_1 b_1 c_1 d_1) + (a_1 b_2 c_2 d_2) + (a_1 b_3 c_3 d_3) + (a_1 b_4 c_4 d_4) + \dots$$

$$(a_1 b_1 c_1 d_1) + (a_1 b_2 c_2 d_2) + (a_1 b_3 c_3 d_3) + (a_1 b_4 c_4 d_4) + \dots = (a_1 b_1 c_1 d_1) + (a_1 b_2 c_2 d_2) + (a_1 b_3 c_3 d_3) + (a_1 b_4 c_4 d_4) + \dots$$

$$\frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_1} = \frac{c_1}{c_1} = \frac{d_1}{d_1} = \dots$$

۲۵۔ جو تھے رتبہ کے ایک مقطع کو مساوی طور پر پچھلی مثال کی طرح

دو متطبی آراستوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور وہی شرطیں پوری ہوتی ہیں اس مقطع سے بننے والے دو کمرے رتبہ کے صغیروں کے درمیان

جو رشتے موجود ہیں انکو معلوم کرو۔

ہم چوتھے رتبہ کا عام مقطع

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

لیتے ہیں اور اسکو پہلے لاپلاس کے مسئلہ سے پھیلاتے ہیں۔ یہاں یہ جتنا ضروری ہے کہ ایسے مقطع کو دوسرے رتبہ کے صغیروں کی رقوم میں پھیلانے کی ضرورت اکثر واقع ہوگی اسلئے طالب علم کو ایسا پھیلاؤ مثبت علامتوں کے ساتھ اچھی طرح ذہن نشین کر لینا چاہیے پھیلاؤ یہ ہے

$$(1, 2) (1, 3) + (1, 4) (2, 3) + (1, 5) (2, 4) + (1, 6) (2, 5)$$

$$+ (1, 7) (2, 6) + (2, 7) (3, 4) + (2, 8) (3, 5) + (2, 9) (3, 6)$$

اسکو لکھنے کا طریقہ واضح ہے۔ جب چار حروف شامل ہوں تو اسی ترتیب کا لحاظ رکھا جائے جیسا کہ ہم نے پچھلے فقروں پر کیا ہے۔

مثال مابقی کی روشنی میں ذیل کے رشتے فوراً لپجاتے ہیں:

$$\frac{(1, 2) (1, 3)}{(1, 4) (2, 3)} = \frac{(1, 4) (2, 5)}{(1, 5) (2, 4)} = \frac{(1, 5) (2, 6)}{(1, 6) (2, 5)} = \frac{(1, 6) (2, 7)}{(1, 7) (2, 6)} = \frac{(1, 7) (2, 8)}{(1, 8) (2, 7)}$$

بشرطیکہ حسب ذیل چار مساواتیں درست ہوں۔

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{3} = \frac{3}{4} = \frac{4}{5} = \frac{5}{6} = \frac{6}{7} = \frac{7}{8} = \frac{8}{9}$$

ہم نے جو کچھ اوپر ثابت کیا ہے اسکا اثر یہ تھا کہ ہندسہ عجیبات میں خط مستقیم کے چہرے حدودوں کی بحث میں ملے گا۔ (دیکھو سامنے کا سہ ابعاد ہندسہ تجلیلی طبع چارم دفعہ ۵۷ ب)۔

# چودھواں باب

## اسقاط

(۷۷)

۱۵۰۔ تعریفات۔ اگر ن مساواتوں کا ایک نظام، ن متغیروں کے درمیان متجانس یا (ن-۱) متغیروں کے درمیان غیر متجانس دیا جائے اور اگر ہم ان مساواتوں کو اس طور پر ترکیب دیں کہ تمام متغیر اسقاط ہو جائیں اور ایک مساوات سا = ایسی حاصل ہو کہ اس میں صرف دو متغیروں کے مساواتوں کے سر شامل ہوں تو ہم سا کو جب اسے منطق صحیح شکل میں بیان کیا جائے حاصل اسقاط کہیں گے۔

آئندہ کی بحث میں ہم خاص طور پر ان دو مساواتوں پر زور دینگے جنہیں صرف ایک معمول مقدار لا شامل ہوتی ہے۔ اس صورت میں مساوات سا = اس بات کی تصدیق کرتی ہے کہ یہ دو مساواتیں ہم آہنگ ہیں یعنی یہ دونوں مساواتیں لا کی ایک مشترک قیمت سے پوری ہوتی ہیں۔ اب ہم یہ بتائیں گے کہ عمل اسقاط کس طرح کیا جاسکتا ہے تاکہ مقدار سا حاصل ہو جائے اور اس کے ساتھ ہی مثالوں کے ذریعہ ہم مختلف طریقوں کی توضیح کریں گے۔ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اسقاط کے بعض اعمال سے سا کی جس قیمت پر ہم پہنچتے ہیں اس میں ایک ضرورت سے زیادہ جزو ضروری شامل ہوتا ہے۔ اسقاط کا وہ طریقہ جس میں متشاکل تعاضلوں سے مدد لی جاتی ہے

سا کی ایک ایسی قیمت کی طرف رہبری کرتا ہے جس میں اس قسم کا جزو ضربی شامل نہیں ہوتا اور اسلئے حاصل استقاط کی ٹھیک تعریف کے لئے دفعہ آئندہ کی بحث کے آخری حصہ کا مطالعہ کیا جاسکتا ہے۔  
فرض کرو کہ مساواتوں

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ج} = 0$$

$$2 \text{ لا} + 3 \text{ ب} + 4 \text{ ج} = 0$$

سے لاکو ساقط کرنا مطلوب ہے۔  
ان مساواتوں کو حل کرنے اور اس طور پر حاصل کردہ لاکو قیمتوں کو مساوی رکھنے سے حاصل استقاط غیر منطبق شکل

$$\frac{2 \text{ لا} + 3 \text{ ب} + 4 \text{ ج}}{1} = \frac{3 \text{ لا} + 4 \text{ ب} + 5 \text{ ج}}{2}$$

میں معلوم ہوتا ہے۔ اسکو لا سے ضرب دینے سے ہم حاصل کرتے ہیں (۶۱)

$$2 \text{ لا} + 3 \text{ ب} + 4 \text{ ج} = 3 \text{ لا} + 4 \text{ ب} + 5 \text{ ج}$$

طرفین کا مربع لینے اور غیر ضروری جزو ضربی لا سے تقسیم کرنے اور پھر مربع لینے سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$4 = 3 \text{ لا} + 4 \text{ ب} + 5 \text{ ج} - (2 \text{ لا} + 3 \text{ ب} + 4 \text{ ج})$$

حاصل استقاط کو اخذ کرنے کا یہ طریقہ عملاً بہت محدود ہے کیونکہ عام طور پر یہ ممکن نہیں کہ چوتھے درجہ سے اعلیٰ تر درجہ والی مساوات کی اصل کو ایک جبریہ ضابطہ سے بیان کیا جائے۔ اسلئے مساواتوں کو پہلے حل کر نیکی بغیر حاصل استقاط کو متعین کر نیکی لئے دوسرے طریقے تجویز کئے گئے ہیں۔ اب ہم استقاط کا وہ طریقہ بیان کرتے ہیں جس میں مساواتوں کی اصولوں کے متشاکل تفاعلوں سے مدد لی جاتی ہے۔





ان مساواتوں کی متناظر فلوں کو باہم ضرب دیں اور ایک ہی ستون میں واقع ہونی والے اجزائے ضربی کو ایک ساتھ رکھیں تو ہمیں معلوم ہو گا کہ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \quad (1)$$

اس لئے ہم لے سکتے ہیں

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \quad (2)$$

کیونکہ سہا کی یہ دونوں قیمتیں  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$  اور  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$  کے سروں کے صحیح تقابل ہیں جو صرف اس وقت صفر ہوتے ہیں جبکہ  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$  اور  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$  میں ایک مشترک جزو ضربی ہو اور وہ متماثل ہوئے ہیں جب ان کو سروں کی رقوم میں بیان کیا جاتا ہے۔

۱۵۲۔ حاصل استقاط کی خاصیتیں۔ (۱) دو مساواتوں کے

سروں میں ان مساواتوں کے حاصل استقاط سہا کا رتبہ مساواتوں کے درجوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے اور اس میں پہلی مساوات کے سر دوسری مساوات کے درجہ میں اور دوسری مساوات کے پہلی مساوات کے درجہ میں داخل ہوتے ہیں۔

یہ ہم دفعہ ۱۵۱ (۱) میں سہا کی دونوں شکلوں کی نظرتانی کرنے سے دیکھ سکتے ہیں کیونکہ اسکی پہلی شکل میں  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$  اور  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$  میں درجہ میں داخل ہوتے ہیں اور اسکی دوسری شکل میں  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$  اور  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$  میں درجہ میں داخل ہوتے ہیں۔ نیز یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ دو ارقام جبکہ ہر جگہ میں سے ایک کا انتخاب کیا جائے (۱)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$  اور  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$  ہیں۔



میں اس استحالة کا عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\pi(\text{عق} - \text{يق})}{\pi(\text{عدم} \dots \text{عدم})} = \frac{\pi(\text{بم} - 1)}{\pi}$$

لیکن  $عم عم \dots عم = (1 - \frac{1}{2}) \frac{1}{2} عم عم \dots عم = (1 - \frac{1}{2})^2 \frac{1}{2} عم عم \dots عم$  اسلئے

$$\text{ص} = \text{ج} \text{ب} \text{ا} \text{م} (1 - \text{ا}) \pi (\text{عج} - \text{عق}) = (1 - \text{ا}) \text{م} \text{ص}$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دو مساواتوں کے حاصل اسقاط میں ایسے تمام سروں کو جنکے لاشقے ایک دوسرے کے متمم ہیں مثلاً (۱، ۱)، (۱، ۲)، (۱، ۳) وغیرہ کو حاصل اسقاط کی قیمت بدلے بغیر ایک دوسرے کی جگہ تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

بغیر ایک دوسرے کی جگہ تبدیل کیا جاسکتا ہے۔  
(۵) اگر دونوں مساواتوں کو ہم رسم استحاله سے  
مستحیل کیا جائے یعنی اگر لا کی بجائے

25

درج کیا جائے اور ہر مفرد جزو فیضی کو کہ لا + مہ سے ضرب دیا جائے تاکہ نئی مساواتیں صحیح

(Integral)

ہو جائیں تو نیا حاصل اسقاط مرہ = (۱۰ مرہ - ۲ مرہ) = ۸ مرہ -

اسکو ثابت کر نیکے لئے ہم جانتے ہیں کہ

فه (لا) = لا (لا - عم) (لا - عم) (لا - عم) . . . . . (لا - عم)

پہ (لا) = بب (لا - پم) (لا - پم) ..... (لا - پم) (لا - پم)

نیز لا - عمر ہو جاتا ہے (لہ - لہ عمر) (لا -  $\frac{مہ عمر - مہ}{لہ - لہ عمر}$ )

لا - بیر ہو جاتا ہے (لہ - لہ بیر) (لا -  $\frac{مہ بیر - مہ}{لہ - لہ بیر}$ )

اب ہر مساوات کے تمام اجزائے ضربی کو باہم ضرب دینے سے  
لہ ہو جاتا ہے لہ (لہ - لہ عمر) (لہ - لہ عمر) ..... (لہ - لہ عمر)

بہ ہو جاتا ہے بہ (لہ - لہ بیر) (لہ - لہ بیر) ..... (لہ - لہ بیر)

نیز چونکہ عمر اور بیر،  $\frac{مہ عمر - مہ}{لہ - لہ عمر}$  اور  $\frac{مہ بیر - مہ}{لہ - لہ بیر}$  میں تحویل ہو جاتے

(74)

اسلئے عمر - بیر ہو جاتا ہے  $\frac{(لہ مہ - لہ مہ)(عمر - بیر)}{(لہ - لہ عمر)(لہ - لہ بیر)}$

اسلئے لہ ب ب (عمر - بیر) ہو جاتا ہے لہ ب ب (لہ مہ - لہ مہ) (عمر - بیر)

یعنی فہ (لا) اور پہ (لا) کی نئی شکلوں سے جو حاصل استقاط محسوب ہوتے

(لہ مہ - لہ مہ) ان س

ہے۔

اس مسئلہ میں پچھلے تین مسئلے شامل ہیں اور وہ مجموعی طور پر اس  
مسئلہ کے معادل ہیں۔

۱۵۳۔ یولر کا استقاط کا طریقہ۔ اگر م دیں اور ن دیں درجوں کی

دو مساواتوں فہ (لا) = اور پہ (لا) = میں کوئی مشترک اصل

طہ ہو تو اہم مان سکتے ہیں

فه (لا) ≡ (لا - طه) فه (لا)

$$\varphi(l) \equiv (l - \mu) \pmod{l}$$

جہاں  $ق_m(لا) \equiv ف_1 لا^{m-1} + ف_2 لا^{m-2} + \dots + ف_m$

$$p_n(\lambda) = q_n^{(0)} + q_n^{(1)} + \dots + q_n^{(n-1)} + q_n^{(n)}$$

اور سرطہ پر منحصر ہونی کی وجہ سے غیر معین ہیں۔  
 اوپر کی دو مثالیں مساواتوں سے

فہ (لا) پر (لا) = فہ (لا) یہ (لا)

جو (م + ن - ۱) درجہ کی ایک متماثلہ مساوات ہے۔ اب اس مساوات کی طرفین میں لا کی مختلف قوتوں کے سروں کو مساوی رکھتے سے (م + ن) مقداروں  $F, F', \dots, F_m, Q, Q', \dots, Q_n$  قن میں پہلے درجہ کی (م + ن) متجانس مساواتیں ملتی ہیں اور ان مقداروں کو دفعہ ۱۴۵ کے طریقہ سے ساقط کیا جائے تو دی ہوئی دو مساواتوں کا حاصل اسقاط ایک مقطع کی شکل میں حاصل ہوتا ہے۔

مشال

فرض کرو کہ دو مساواتوں

واللّا + ب لا + ج = . ' اللّا + ب لا + ج = .

میں ایک اصل مشترک ہے۔ تب متماثل

(ق لا قی) (ال لا ب لا ج) = (ف لا ف) (ال لا ب لا ج)

یا (ق) - ف، لآ + (ق) + ق - ف، ف - ف، لآ

+(ق ج + ق پ - ف ج - ف پ) لا + ق ج - ف ج = .

اس مساوات کے تمام سروں کو صفر کے مساوی رکھنے سے حسب ذیل چار متجانس مساواتیں ملتی ہیں

$$\begin{aligned} & \text{ق} = \text{ف} - \text{ب} \\ & \text{ق} + \text{ب} = \text{ق} - \text{ب} - \text{ف} \\ & \text{ق} + \text{ج} = \text{ق} - \text{ب} - \text{ف} - \text{ج} \\ & \text{ق} = \text{ف} - \text{ج} \end{aligned}$$

اور ف، ف، ق، ق، ق کو ساقط کرنے سے مشترک اصل کے لئے ہمیں شرط ملتی ہے

$$= \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

طالب علم آسانی کے ساتھ اس بات کی تصدیق کر سکتا ہے کہ یہ نتیجہ دفعہ ۱۵۰ کے نتیجہ کے مطابق ہے۔

۱۵۲۔ سلوسٹر (sylvester) کا استقاط کا طریقہ۔ اس طریقہ سے

حوصل استقاط کے لئے وہی مفطعات حاصل ہوتے ہیں جو یو لر کے طریقہ سے ملتے ہیں۔ لیکن عمومیت کے نقطہ نظر سے اس طریقہ کو یو لر کے طریقہ پر ترجیح حاصل ہے کیونکہ اسکو اکثر ایسی مساواتوں کے حاصل استقاط دریافت کرنے میں بھی استعمال کیا جاسکتا ہے جنہیں متعدد متغیر شامل ہوں۔

فرض کرو کہ دو مساواتوں

$$\text{ف} = \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \dots + \text{لا} + \text{لا}$$

$$\text{پ} = \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \dots + \text{ب} + \text{ب}$$

کا حاصل استقاط دریافت کرنا مطلوب ہے۔ پہلی مساوات کو ہم لا کی متواتر قوتوں  
 $لا^۱، لا^۲، لا^۳، \dots، لا^۳$   
 سے اور دوسری کو

$لا^۱، لا^۲، لا^۳، \dots، لا^۳$

سے ضرب دیتے ہیں۔ اس طرح (م + ن) مساواتیں حاصل ہوتی ہیں  
 جنہیں لا کی بڑی سے بڑی قوت ن + م - ۱ ہے۔ اب اتنی مساواتیں  
 لمبائی ہیں کہ ان سے  $لا^۱، لا^۲، لا^۳، \dots، لا^۳$  لا کو الگ الگ  
 متغیر سمجھ کر ان کو ساقط کیا جاسکتا ہے۔

## مثالیں

(76)

۱۔ درجہ دوم کی دو مساواتوں

$$لا^۱ + لا^۲ + ج = ۰، لا^۱ + لا^۲ + ب = ۰$$

کا حاصل استقاط معلوم کرو۔

$$لا^۱ + لا^۲ + ب = ۰$$

$$لا^۱ + لا^۲ + ج = ۰$$

$$لا^۱ + لا^۲ + ب = ۰$$

$$لا^۱ + لا^۲ + ج = ۰$$

ان سے  $لا^۱، لا^۲$  لا کو ساقط کرنے سے وہی مقطع حاصل ہوتا ہے جو پچھلے  
 دفعہ میں حاصل ہوا تھا صرف اس قدر فرق ہے کہ اب صقوں کی بجائے ستون ہیں:-

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$



۲ — دوماواتوں

$$= \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{5}{1} + 1 = 6$$

و = ب + پ + لا + پ + لا + بی + لا =

کا حاصل اسقاط لکھو۔  
پہلے کی طرح عمل کرنے سے ہمیں آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ سما میں ۷ کے سر تیسرے درجہ میں اور و کے سر چوتھے درجہ میں شامل ہوتے ہیں۔ نیز  $\beta$  بھی سما کی ایک رقم ہے (دیکھو (۱) دفعہ ۱۵۲)۔

۱۵۵۔ بیرو (Bazout) کا استقاء کا طریقہ۔ عام طریق عمل

بہت آسانی کے ساتھ سمجھ میں آجائیگا اگر اسکو اول جند خاص خاص صورتوں پر استعمال کیا جائے۔ چنانچہ ہم اسکو (۱) ایک ہی درجہ کی مساداتوں کے لئے اور (۲) مختلف درجوں کی مساداتوں کے لئے استعمال کریں گے۔

(۱) فرض کرو کہ دو کعبی مساداتوں

$\cdot = \text{ج} + \text{لا} + \text{د}$   
 $\cdot = \text{ج} + \text{لا} + \text{د}$

(۶۶)

کا حاصل استقاط معلوم کرنا مطلوب ہے۔

ان دو مساواتوں کو متواتر

اور

اور

اور

سے ضرب دینے اور ہر دفعہ اس طور پر حاصل شدہ حاصل ضربوں کو تفریق کرنے سے ہمیں حسب ذیل تین مساواتیں ملتی ہیں:-

$$(د ب) لا + (د ج) لا + (د د) لا = ۰$$

$$(د ج) لا + (د د) لا + (د ب) لا = ۰$$

$$(د د) لا + (د ب) لا + (د ج) لا = ۰$$

ان مساواتوں سے لا، لا کو جدا گانہ متغیروں کے طور پر ملاحظہ

کرنے سے حاصل استقاط ایک متشاکل مقطع کی شکل میں حاصل ہوتا ہے جو ذیل میں درج ہے:-

$$\begin{vmatrix} (د ب) لا & (د ج) لا & (د د) لا \\ (د ج) لا & (د د) لا + (د ب) لا & (د ب) لا \\ (د د) لا & (د ب) لا & (د ج) لا \end{vmatrix}$$

حاصل استقاط کو اخذ کرنے کے طریقہ کو زیادہ واضح کر نیکی لئے

ہم حسب ذیل طریقہ عمل درج کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ دو چار درجی مساواتیں ہیں

$$لا + ب لا + ج لا + د لا + ع = ۰$$

$$لا + ب لا + ج لا + د لا + ع = ۰$$

اب بیرو کے طریقہ کو کوششی نے جس صورت میں پیش کیا ہے اسکے مطابق عمل کرنے سے ہمیں مساواتوں کا حسب ذیل نظام ملتا ہے

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} &= \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2} \\ \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2} &= \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2} \\ \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2} &= \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2} \\ \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2} &= \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2} \\ \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2} &= \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2} \end{aligned}$$

کسروں کو دور کرنے اور لا<sup>۱</sup>، لا<sup>۲</sup>، لا کو ساقط کرنے سے حاصل استقاط کے لئے حسب ذیل متقطع ملتا ہے :-

$$\begin{vmatrix} (d, b) & (d, c) & (d, e) & (d, f) \\ (d, c) & (d, e) & (d, f) & (d, g) \\ (d, e) & (d, f) & (d, g) & (d, h) \\ (d, f) & (d, g) & (d, h) & (d, i) \end{vmatrix}$$

اب اگر ہم دو متشاکل مقطعوں

$$\begin{vmatrix} (d, b) & (d, c) & (d, e) & (d, f) \\ (d, c) & (d, e) & (d, f) & (d, g) \\ (d, e) & (d, f) & (d, g) & (d, h) \\ (d, f) & (d, g) & (d, h) & (d, i) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} (d, b) & (d, c) & (d, e) & (d, f) \\ (d, c) & (d, e) & (d, f) & (d, g) \\ (d, e) & (d, f) & (d, g) & (d, h) \\ (d, f) & (d, g) & (d, h) & (d, i) \end{vmatrix}$$

پر غور کریں جنکی ساخت فوراً ظاہر ہو جاتی ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ حاصل استقاط

کا، دوسرے مقطع کے عناصر کو پہلے مقطع کے چار درمیانی عناصر میں جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح پانچویں درجہ کی دو مساواتوں

$$د\lambda + ب\lambda + ج\lambda + د\lambda + ع\lambda + ف = .$$

$$د\lambda + ب\lambda + ج\lambda + د\lambda + ع\lambda + ف = .$$

کی صورت میں حاصل استقاط ذیل کے تین مقطعوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\begin{array}{|l} (د\lambda) (ج\lambda) (د\lambda) (ع\lambda) (ف\lambda) \\ (ج\lambda) (د\lambda) (ع\lambda) (ف\lambda) (ب\lambda) \\ (د\lambda) (ع\lambda) (ف\lambda) (ب\lambda) (ج\lambda) \\ (ع\lambda) (ف\lambda) (ب\lambda) (ج\lambda) (د\lambda) \\ (ف\lambda) (ب\lambda) (ج\lambda) (د\lambda) (ع\lambda) \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} (ب\lambda) (ج\lambda) (د\lambda) (ع\lambda) (ف\lambda) \\ (ب\lambda) (د\lambda) (ع\lambda) (ف\lambda) (ج\lambda) \\ (ب\lambda) (ع\lambda) (ج\lambda) (د\lambda) (ف\lambda) \end{array}$$

ان مقطعوں سے حاصل استقاط کو اخذ کرنے کے لئے دوسرے مقطع کے

عناصر کو پہلے مقطع کے بیچ کے نو عنصروں میں جمع کیا جائے اور پھر حاصل کردہ مقطع کے مرکزی عنصر میں تیسرا مقطع جمع کیا جائے۔ طالب علم کو عام صورت میں حاصل استقاط کا مقطع بنانے میں انطباق کا ایسا ہی عمل کرنے میں کوئی مشکل پیش نہ آئیگی۔

(۲) اب ہم وہ صورت لیتے ہیں جس میں دو مساواتیں مختلف ابعاد کی ہوں مثلاً

۱ لا + ب لا + ج لا + د لا + ع = ۔

۲ لا + ب لا + ج = ۔

ان مساواتوں کو ترتیب وار

۱ اور ۲

۱ لا + ب اور (۱ لا + ب) لا

سے متواتر ضرب دینے اور ہر دفعہ اس طور پر بنے ہوئے حاصل ضرب کو

کو تفریق کرنے سے ہمیں ذیل کی دو مساواتیں ملتی ہیں :-

(۱ ب) لا + (۱ ج) لا - (۱ لا + ع) لا = ۔

(۱ ج) لا + (ب ج) - (۱ لا - (۱ ب + ع) لا - (لا - ع) ب = ۔

اب اگر ہم انکے ساتھ دو مساواتوں

۱ لا + ب لا + ج لا = ۔

۱ لا + ب لا + ج لا = ۔

کو شامل کریں تو ہمارے پاس چار مساواتیں ہونگی جنکے ذریعہ سے

۱ لا، ۲ لا، لا سا قہ ہو سکتے ہیں۔ چنانچہ حاصل استقاط ایک مقطع کی شکل میں ملتا ہے جو یہ ہے :-

۱	۲	۱	۲
ب	ج	ب	ج
لا	لا	لا	لا
ع	ع	ع	ع
۱	۲	۱	۲
ب	ج	ب	ج
لا	لا	لا	لا
ع	ع	ع	ع

اس مقطع میں پہلی مساوات کے سر دوسرے درجہ میں اور دوسری

مساوات کے سر جو تھے درجہ میں شامل ہوتے ہیں اور یہی ہونا چاہئے۔ پس کوئی غیر ضروری جزو ضربی اس حاصل استقاط میں داخل نہیں ہوتا۔ اب ہم عام صورت لیتے ہیں جس میں دو مساواتیں م دیں اور ن دیں درجوں کی ہیں۔

فرض کرو کہ مساواتیں ہیں

$$\text{فہ (لا)} \equiv \text{ب}^1 \text{ لا}^1 + \text{ب}^2 \text{ لا}^2 + \dots + \text{ب}^m \text{ لا}^m = 0$$

$$\text{پہ (لا)} \equiv \text{ب}^1 \text{ لا}^1 + \text{ب}^2 \text{ لا}^2 + \dots + \text{ب}^n \text{ لا}^n = 0$$

جہاں م < ن۔ فرض کرو کہ دوسری مساوات کو لا<sup>ن-م</sup> سے ضرب دیا گیا ہے تو

$$\text{ب}^1 \text{ لا}^1 + \text{ب}^2 \text{ لا}^2 + \dots + \text{ب}^n \text{ لا}^n = 0$$

اس مساوات کا درجہ وہی ہے جو پہلی مساوات کا ہے۔ لیکن اس مساوات میں پہ (لا) = 0 کی ن اصلوں کے علاوہ م - ن اصلیں ہیں جو صفر کے مساوی ہیں۔ اس لئے ہمیں اس بات سے خبردار رہنا چاہئے کہ حاصل استقاط کی شکل میں جزو ضربی لا<sup>ن-م</sup> (یعنی ان اصلوں کو فہ (لا) = 0 میں درج کر نیکا جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے) داخل نہ ہو۔ ان دو مساواتوں سے اوپر کی صورت (۱) کے مطابق ہم حسب ذیل ن مساواتیں اخذ کرتے ہیں:-

$$\frac{\text{ب}^1 \text{ لا}^1 + \text{ب}^2 \text{ لا}^2 + \dots + \text{ب}^m \text{ لا}^m}{\text{ب}^1 \text{ لا}^1 + \text{ب}^2 \text{ لا}^2 + \dots + \text{ب}^n \text{ لا}^n} = 0$$

$$\frac{لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + ..... + لا^۴}{ب^۱ + ب^۲ + ب^۳ + ..... + ب^۴} = \frac{لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + ..... + لا^۴}{ب^۱ + ب^۲ + ب^۳ + ..... + ب^۴}$$

$$\frac{لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + ..... + لا^۴}{ب^۱ + ب^۲ + ب^۳ + ..... + ب^۴} = \frac{لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + ..... + لا^۴}{ب^۱ + ب^۲ + ب^۳ + ..... + ب^۴}$$

جو، کسروں کے دور کرنے پر، سب کی سب (م-۱) دیں درجہ کی مساواتیں ہیں۔ ان مساواتوں اور م-ن مساواتوں

$$= \frac{ب^۱ + ب^۲ + ب^۳ + ..... + ب^۴}{ب^۱ + ب^۲ + ب^۳ + ..... + ب^۴}$$

$$= \frac{ب^۱ + ب^۲ + ب^۳ + ..... + ب^۴}{ب^۱ + ب^۲ + ب^۳ + ..... + ب^۴}$$

$$= \frac{ب^۱ + ب^۲ + ب^۳ + ..... + ب^۴}{ب^۱ + ب^۲ + ب^۳ + ..... + ب^۴}$$

سے لا<sup>۱</sup>، لا<sup>۲</sup>، .....، لا کو جداگانہ مقداروں کے طور پر اسقاط کیا جائے تو حاصل اسقاط م دیں رتبہ کے ایک مقطع کی شکل میں ملتا ہے جس میں پہلی مساوات کے سر ن دیں درجہ میں اور دوسری مساوات کے سرم وین درجہ میں داخل ہوتے ہیں۔ پس یہ ظاہر ہے کہ کوئی غیر ضروری جزو ضروری داخل نہیں ہو سکتا اور اس طریقہ سے جو حاصل اسقاط ملتا ہے اس پر صفر اصلوں کے شامل کرنے سے کوئی اثر نہیں پڑتا۔

(81) اگر ایک ہی درجہ م کی دو مساواتوں فہ (لا) =، پ (لا) = کا حاصل اسقاط سرا ہو تو نظام

لہ فہ (لا) + مہ پہ (لا) = لہ فہ (لا) + مہ پہ (لا) =  
کے حاصل استقاط سہ کی قیمت

(لہ مہ - لہ مہ) سہ

ہوگی کیونکہ صغیروں (لہ، مہ) میں سے ہر ایک (جو نیزہ کے طریقہ  
میں سہ کے مقطع کی ترکیب میں آتے ہیں) اس صورت میں

لہ لہ + مہ مہ، لہ لہ + مہ مہ، لہ لہ + مہ مہ، لہ لہ + مہ مہ،  
لہ لہ + مہ مہ، لہ لہ + مہ مہ، لہ لہ + مہ مہ، لہ لہ + مہ مہ،

ہو جاتا ہے۔ پس سہ = (لہ مہ - لہ مہ) سہ کیونکہ سہ م وہیں رہتا  
مقطع ہے۔

۱۵۶۔ استقاط کے دوسرے طریقے۔ ہم استقاط کا ایک

اور طریقہ بیان کر نیچے بعد اس مضمون کو ختم کرتے ہیں۔ یہ طریقہ  
اکثر استعمال ہوتا ہے لیکن اس میں یہ خرابی ہے کہ حاصل استقاط  
میں عام طور پر غیر ضروری اجزائے ضربی شامل ہوتے ہیں جس عمل  
کی اب ہم تشریح کرینگے وہ خاصیت اس عمل کے معادل ہے جسکو  
عام طور پر مشترک مقسوم علیہ اعظم کا طریقہ کہتے ہیں۔

اس طریقہ میں درجہ دوم کی دو مساواتوں

$$لہ لہ + مہ لہ + ج =$$

$$لہ لہ + مہ لہ + ج =$$

کا حاصل استقاط معلوم کرنے کے لئے ہم ان مساواتوں کو یکے بعد  
دیگرے لہ اور لہ، ج اور ج سے ضرب دیتے ہیں اور حاصل ضرب کو



تفریق کرتے ہیں۔ اس طرح ہمیں دو مساواتیں ملتی ہیں

$$(ا ب) لا + (ا ج) = ۰$$

$$لا \{ (ا ج) لا + (ب ج) \} = ۰$$

اب چونکہ لا کی صفر قیمت دی ہوئی دونوں مساواتوں کو پورا نہیں کرتی ہم اس دوسری مساوات سے جزو ضربی لا خارج کر سکتے ہیں اور پھر حاصل استقاط کو شکل

$$(ا ج) - (ا ب) (ب ج) = ۰$$

میں حاصل کرتے ہیں جس میں کوئی غیر ضروری جزو ضربی نہیں ہے۔ چونکہ اس جملہ کا درجہ چار اور اس کا وزن چار ہے یہ حاصل استقاط کی صحیح شکل ہے۔

اسی طرح کے عمل سے کئی مساواتوں

$$لا + ب لا + ج لا + د = ۰$$

$$لا + ب لا + ج لا + د = ۰$$

کا حاصل استقاط معلوم کر نیکی لئے ہم ان مساواتوں کو یکے بعد دیگرے

لا اور د اور د سے ضرب دیں اور اس طور پر بنے ہوئے حاصل ضربوں کو ہر دفعہ تفریق کریں تو حاصل ہوتا ہے :-

$$\left\{ \begin{array}{l} (ا ب) لا + (ا ج) لا + (ا د) = ۰ \\ (ا د) لا + (ب د) لا + (ج د) = ۰ \end{array} \right. \dots (۱)$$

اب ان دو درجہ دوم کے جملوں سے لا کو محصلہ بالا ضابطہ کے ذریعہ سے ساقط کیا جائے تو حاصل استقاط ملتا ہے

(ا ب) (د د)	(ا ب) (ا ج)	(ا ج) (د د)
(ا د) (د ج)	(ا د) (ب د)	(ب د) (ج د)

جو ایسا جملہ ہے جس کا درجہ ۸ اور وزن ۱۲ ہے حالانکہ درجہ ۶ اور وزن ۹ ہونا چاہئے۔ پس یہ ظاہر ہے کہ یہ ایک جزو ضربی سے قابل تقسیم ہے جس کا درجہ ۲ اور وزن ۳ ہے۔ اس لئے اس جزو ضربی کی شکل ہونی چاہئے  $L(ب ج ا) + M(ا د ا) - اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ یہ جزو ضربی  $(ا د ا)$  ہے اور یہ معلوم کریں گے کہ اس سے تقسیم کرنے کے بعد خارج قسمت کیا ہے۔$

اس مقصد کے لئے صرف ان رموز کو رکھنے سے نہیں  $(ا د ا)$  بالراست شامل نہیں ہوتا ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(ا ب ا)(ج د ا) \{ (ا ب ا)(ج د ا) + (ا د ا)(ب د ا) \}$$

جو  $(ا د ا)$  سے تقسیم ہو جاتا ہے کیونکہ

$$(ب ج ا)(ا د ا) + (ج ا د)(ا ب ا) + (ا ب ا)(ج د ا) = ۰$$

مقطعات کو پھیلانے اور  $(ا د ا)$  سے تقسیم کر دینے سے آخر الامر

ہمیں خارج قسمت ملتا ہے

$$(ا د ا)^۲ - ۲(ا ب ا)(ج د ا)(ا د ا) + (ب د ا)(ج ا د)(ا د ا)$$

$$+ (ج ا د)(ا د ا)(ج د ا) + (ا ب ا)(ب د ا) - (ا ب ا)(ب ج ا)(ج ا د)$$

جو واجب درجہ اور وزن کا ہونے کی وجہ سے مطلوبہ حاصل اسقاط ہے۔

اگر ہم اسی طرح دو چار درجی مساواتوں کا حاصل اسقاط عمل کو دو کعبی مساواتوں سے ساقط کر نہیں تھوڑ کر کے معلوم کرنا چاہیں تو ہمیں چوتھے درجہ کا ایک غیر ضروری جزو ضربی خارج کرنا ہوگا جو اس بات کی شرط ہے کہ ان کعبیوں میں ایک جزو ضربی مشترک ہونا چاہئے اگرچہ چار درجیوں میں جن سے یہ کعبی اخذ کئے گئے ہیں مشترک جزو ضربی کا ہونا ضروری نہیں ہے۔ بالعموم اگر ہم اس طریقہ سے

ن ویں درجہ کی دو مساواتوں کا حاصل استقاط (ن - ۱) درجہ کی دو مساواتوں سے ساقط کرنے سے، تلاش کریں تو ہمیں ۲ن - ۴ ویں رتبہ کا ایک غیر ضروری جزو ضربی خارج کرنا پڑے گا۔ اس لئے یہ طریقہ پچھلے تمام طریقوں سے ادنیٰ ہے اور اسکو سہولت کے ساتھ استعمال نہیں کیا جاسکتا جب تک کہ غیر ضروری اجزائے ضربی آسانی کیساتھ جدا نہ ہوسکیں۔

۱۵۔ مہینر - کسی مساوات کا میرج کیسا دیتا ہے ایک واحد مجهول مقدار شامل ہو سروس کا وہ سادہ ترین منطق صحیح تفاعل ہے جسکا صفر ہونا اس شرط کو بیان کرتا ہے جو مساوی اصولوں کے لئے ہے۔ اس قسم کے تفاعلوں کی مثالیں دفعات ۴۳ اور ۶۸ میں آچکی ہیں۔ اب ہم یہ بتانگے کہ وہ حواصل استقاط کی خاص صورتیں ہیں۔

اگر مساوات ف (لا) = میں ایک دوہری اصل ہو تو یہ اصل مساوات ف (لا) = میں ایک مرتبہ واقع ہوگی اور لاف (لا) کو ن ف (لا) میں سے تفریق کیا جائے تو اسی اصل کو ن ف (لا) - لاف (لا) = میں واقع ہونا چاہئے۔ یہ مساوات لایں (ن - ۱) ویں درجہ کی ہے۔ اس مساوات اور مساوات ف (لا) = سے جسکا درجہ بھی ن - ۱ ہے لا کو ساقط کیا جائے تو ہمیں سروس کا ایک تفاعل ملتا ہے جسکا صفر ہونا مساوی اصولوں کے لئے ضروری شرط ہے۔ اس حاصل استقاط کا درجہ ف (لا) کے سروس میں ۲ (ن - ۱) ہے اور اسکا وزن ن (ن - ۱) ہے جیسا کہ دفعہ ۱۵۲ (۱) میں دی ہوئی نمونہ کی ہموں کو دیکھنے سے واضح ہے۔ اگر مہینر کو دی ہوئی مساوات کی اصولوں کے ایک متشکل تفاعل کے طور پر بیان کیا جائے تو وہ اصولوں کے فرقوں کے (کم سے کم قوت میں اٹھائے ہوئے) اس حاصل ضرب کے مساوی ہوگا جسکو سروس کی رقوم میں منطق شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب II (عم - عم) <sup>۲</sup>

اس طور پر بیان ہو سکتا ہے اور چونکہ یہ کسی اصل میں ۲ (ن-۱) دیں  
درجہ کا اور تمام اصلوں میں ن (ن-۱) دیں درجہ کا ہے اس لئے یہ نتیجہ  
نکلتا ہے کہ ممیز ایک عددی جزو ضربی سے ضرب کھا کر  
۲ (ن-۱) (عم-عم) کے مساوی ہے۔

اگر تفاعل ف (لا) میں ایک دوسرا متغیر ما داخل کر کے اسکو  
ہندسات بنایا جائے تو وہ دو تفاعل جنکا حاصل استقاط ف (لا) کا ممیز  
ہے لا اور ما کے لحاظ سے ف (لا) کے تفرقی سر ہیں۔ اسی طرح  
بالعموم ن متغیروں کا کوئی ہندسات تفاعل ہو تو اسکا ممیز وہ حاصل استقاط  
ہے جو ان متغیروں کو ن مساواتوں سے ساقط کرنے سے بنتا ہے  
جہاں یہ مساواتیں تفاعل کو باری باری سے ہر متغیر کے لحاظ سے تفرق  
کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔

## مثالیں

(84)

$$1. \text{ لا}^2 + 2. \text{ لا} + 3. \text{ لا} + 4. \text{ لا} = 0$$

کا ممیز معلوم کرو۔

ہیں یہاں دو مساواتوں

$$1. \text{ لا}^2 + 2. \text{ لا} + 3. \text{ لا} = 0$$

$$1. \text{ لا}^2 + 2. \text{ لا} + 3. \text{ لا} = 0$$

کا حاصل استقاط معلوم کرنا ہے۔ دفعہ ۱۵۰ کی رو سے ایک مشترک اصل  
کیلئے شرط ہے

$$2. (1. \text{ لا} - 1. \text{ لا}) - (1. \text{ لا} - 1. \text{ لا}) = 0$$

پس سروں کا یہ تفاعل ممیز ہے جس کو دفعہ ۱۵۴ کے ذریعہ ایک  
مقطع کی شکل میں بھی لکھا جاسکتا ہے:

۱	۲	۳	۴
۱	۲	۳	۴
۱	۲	۳	۴
۱	۲	۳	۴

اسکی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کہ میز کی یہ قیمت وہی

ہے جو دفعہ ۴۲ میں پہلے حاصل کی جا چکی ہے۔

۲۔ چار درجی

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

کا میز ایک مقطع کی شکل میں بیان کرو۔

یہاں مساداتوں

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

سے لاکو ساقط کرنا ہے۔ دفعہ ۱۵۴ کے طریقہ سے حاصل اسقاط ہے

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

اسکو وہی ہونا چاہئے جو ح<sup>۳</sup> - ۲۷ ہے (دیکھو دفعہ ۶۸)۔

۳۔ بیز کے اسقاط کے طریقہ سے چار درجی کے میز کو ایک مقطع کی



سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ یہ تہری اصل حسب ذیل تین مساواتوں کی ایک مشترک اصل ہونی چاہئے :-

$$\begin{aligned} 1. & \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \\ 2. & \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \\ 3. & \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \end{aligned}$$

پس شرط ہے

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

۶۔ ثابت کرو کہ دو تقاطعوں کے حاصل ضرب کا مینر انجی مینرول کے

ماصل ضرب کو حاصل استقاط کے مربع سے ضرب دینے پر ماصل ہوتا ہے۔  
دفعہ ۱۵۱ اور دفعہ ۱۵۲ کے نتیجوں کو استعمال کرنے سے یہ نتیجہ واضح ہے کیونکہ تمام اصولوں کے فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب مشتمل ہے ہر مساوات کی جدا گانہ اصولوں کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب اور ان فرقوں کے حاصل ضرب کے مربع پر جو ایک مساوات کی ہر اصل کے ساتھ دوسری مساوات کی سب اصولوں کو لینے سے بنتے ہیں۔

۱۵۸۔ دو مساواتوں کی مشترک اصل کی تعیین۔ اگر دو مساواتوں

$$0 = \lambda^2 + \lambda + 1 + \dots + \lambda^2 + \lambda + 1$$

$$0 = \lambda^2 + \lambda + 1 + \dots + \lambda^2 + \lambda + 1$$

کا حاصل استقاط ہو اور کوئی مشترک اصل نہ تو

$$\frac{\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}}{\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}} = \frac{\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}}{\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}} = \frac{\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}}{\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}} = \text{عہ}$$

اس کو ثابت کرنے کے لئے ہم پہلے یہ دکھاتے ہیں کہ تفاعل فہ (لا) اور پ (لا) حاصل ہو سکتے ہیں ایسے کہ  $\text{س} \equiv \text{ع} + \text{فہ} (لا) + \text{و پ} (لا)$  یعنی جب ع اور و کو بالترتیب فہ (لا) اور پ (لا) سے ضرب دیا جاتا ہے اور ان کو جمع کیا جاتا ہے تو وہ تمام ارقام جنہیں لا شامل ہوتا ہے متماثل معدوم ہوتی ہیں۔ مثلاً س کی وہ شکل جو جو تھے اور تیسرے درجوں کے تفاعلوں کے لئے مثال ۲ دفعہ ۱۵۴ میں دی گئی ہے۔ دوسرے ستون کو لا سے ضرب دو تیسرے کو لا سے، وغیرہ اور پہلے ستون میں جمع کرو تو پہلے ستون کے حسب ذیل عناصر حاصل ہوتے ہیں ع، لاء، لاء، و، لاو، لاو، لاو۔ اسکے بعد مقطع کو پھیلاؤ تو وہ شکل  $\text{ع} + \text{فہ} (لا) + \text{و پ} (لا)$  اختیار کرتا ہے جہاں فہ، لا کا ایک دو درجی تفاعل ہے اور پ تین درجی۔ ثبوت کا یہ طریقہ کسی دو تفاعلوں پر استعمال کیا جاسکتا ہے اور بالعموم اگر تفاعلوں ع اور و کے درجے م اور ن ہوں تو فہ اور پ کے درجے ن-۱ اور م-۱ ہونگے۔ اسلئے

$$\text{س} \equiv \text{ع} + \text{فہ} + \text{و پ}$$

$$\text{جس سے } \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} \equiv \frac{\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}}{\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}} + \frac{\text{فہ}}{\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}} + \frac{\text{و پ}}{\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}}$$

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}^{1+}} \equiv \frac{\text{لا}^{1+\text{ن}} + \text{ع}}{\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}^{1+}}} + \frac{\text{فہ}}{\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}^{1+}}} + \frac{\text{و پ}}{\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}^{1+}}}$$



اب اگر مساواتوں  $6 = 0$  اور  $9 = 0$  کی ایک مشترک اصل  
 ملے ہو تو اوپر کی مساواتوں میں لا کی یہ قیمت درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فرق ۲}{فرق ۱} = \frac{فرق ۳}{فرق ۱}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔  
 اسی طرح مینر  $\Delta$  کو تفریق کرنے سے کسی مساوات کی دو ہری اصل  
 متعین کیجا سکتی ہے۔

(87)

جب مساواتوں  $6 = 0$  اور  $9 = 0$  میں دو اصلیں مشترک  
 ہوں تو  $فرق ۱$ ،  $فرق ۲$ ،  $فرق ۳$  وغیرہ کے لحاظ سے مسا کے پہلے تفریقی سر

متماثل معدوم ہوتے ہیں اور اسلئے دوسرے تفریقی سر لینا ضروری  
 ہے۔ اس صورت میں مساوات درجہ دوم

$$\frac{فرق ۲}{فرق ۱} - لا - \frac{فرق ۳}{فرق ۱} + \frac{فرق ۴}{فرق ۱} = 0$$

کی اصلیں مشترک اصلوں کے طور پر حاصل ہوتی ہیں۔ یہ بات مسا کی مندرجہ  
 بالا قیمت کو تفریق کرنے سے ظاہر ہے کیونکہ اس آخری مساوات کے  
 پہلے رکن کا جملہ ذیل کے جملہ کے مساوی حاصل ہوتا ہے:-

$$\left( \frac{فرق ۲}{فرق ۱} - لا - \frac{فرق ۳}{فرق ۱} + \frac{فرق ۴}{فرق ۱} \right) 6$$

$$+ \left( \frac{فرق ۳}{فرق ۱} - لا - \frac{فرق ۴}{فرق ۱} + \frac{فرق ۵}{فرق ۱} \right) 9$$

اور یہ ایسا جملہ ہے کہ اگر اسمیں مشترک اصولوں میں سے کوئی اصل لا کی بجائے درج کیجائے تو یہ جملہ معدوم ہو جاتا ہے۔  
 اگر تین یا زیادہ مشترک اصلیں ہوں تو اسی طرح کا عمل صادق آئیگا۔  
 جن اصولوں کا اس باب میں ذکر آیا ہے انکی توضیح کے لئے حسب ذیل مثالیں دیجاتی ہیں۔

## امثلہ

۱۔ مساواتوں

$$\begin{aligned} 1 \text{ لا} + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ج} &= 0 \\ 1 \text{ لا} &= 1 \end{aligned}$$

سے لا ساقط کرو۔  
 پہلی مساوات کو لا سے ضرب دو تو، چونکہ لا = 1

$$2 \text{ ب} + 3 \text{ ج} + 1 = 0$$

اور پھر لا سے ضرب دینے سے

$$3 \text{ ج} + 1 \text{ لا} + 2 \text{ ب} = 0$$

ان تین مساواتوں سے لا اور لا کو ساقط کیا جائے تو نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(88) اگر متشکل تفاعلوں کا طریقہ استعمال کیا جائے (دفعہ ۱۵۱) اور دوسری مساوات کی اصلیں پہلی مساوات میں درج کیجائیں تو حاصل اسقاط اس شکل میں ملتا ہے

$$(1 + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ج}) (1 + 3 \text{ ب} + 2 \text{ ج}) (1 + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ج})$$

۲۔ اسی طرح مساواتوں

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ج} + 1 \text{ لا} + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ج} = 0, 1 \text{ لا} = 1$$



اس طور پر بیان کیا جاتا ہے :-

$$= \begin{vmatrix} \cdot & د & ج & ب & ۱ \\ ۰ & ج & ب & ۱ & \cdot \\ ۱ & ۰ & ج & ب & ۱ \\ ۰ & د & ج & ب & ۱ \\ ۰ & ج & ب & ۱ & \cdot \end{vmatrix}$$

باری باری سے ہر ستون کو ترک کر دینے سے متذکرہ بالا پانچ مقطعات بنتے ہیں۔ یہ بات مشاہدہ طلب ہے کہ محصلہ شرطیں دو شرطوں کے حامل ہیں جو ایک دوسرے پر منحصر نہیں ہیں اور یہ بتایا جاسکتا ہے کہ جب کوئی دو مقطعات معدوم ہوں تو باقی تین بھی معدوم ہونے چاہئیں۔  
۴۔ متماثلہ ذیل کو ثابت کر دو۔

(89)

$$(عہ ۲ - عہ ۱) = \begin{vmatrix} ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{vmatrix}$$

مساد اتوں

$$عہ ۱ + عہ ۲ = ۰, عہ ۱ + عہ ۳ = ۰$$

سے لا اور ما اور ان مساد اتوں سے اخذ کردہ مساد اتوں

(عہ ۱ + عہ ۲) = ۰, (عہ ۱ + عہ ۳) = ۰, (عہ ۲ + عہ ۳) = ۰ سے متماثلہ مندرجہ بالا ثابت ہو جاتی ہے۔  
کیونکہ اسکے دائیں جانب کا مقطع آخر کی تین مساد اتوں سے لا، لا، لا اور ما کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور یہ مقطع اس مقطع کی تیسری قوت کے متماثلہ مساد ہونا چاہئے جو غلطی مساد اتوں سے لا اور ما کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

۵۔ اسی طرح ثابت کرو

$$(عہ ۲ - عہ ۱) = \begin{vmatrix} ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{vmatrix}$$

۶۔ چار مساواتوں

$$\frac{لہ + مہ}{لہ + مہ} = \frac{لہ + مہ}{لہ + مہ} \text{ وغیرہ}$$

(جو ہم رسم استعمال میں متغیروں کے باہمی رشتہ کو تعبیر کرتی ہیں) سے  
لہ، مہ، لہ، مہ اسقاط کر کے مثال ۱۳ صفحہ ۸۵ کا نتیجہ ثابت کر دو۔

۷۔ اگر

$$۱ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$$

$$۱ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$$

$$۱ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$$

$$۱ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$$

تو ح اور و کو لا اور ما کے تفاعل سمجھ کر انکا حاصل اسقاط معلوم کر دو۔

$$۱ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$$

$$۱ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$$

اسلئے اگر لا، ما کی مشترک قیمتوں کے لئے ح اور و معدوم ہوں تو اجزا

ضرب کا کوئی زوج مثلاً ح۔ ح و اور ح۔ ح و معدوم ہونا چاہئے۔

پس ح۔ ح و اور ح۔ ح و کا حاصل اسقاط بنانے اور ح اور و کے

حاصل اسقاط کو سا (ح و) سے تعبیر کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$سا (ح و) = (ح و - ح و) = (ح و - ح و)$$

اور ان تمام حاصل اسقاط کو ایک ساتھ ضرب دینے سے

$$سا (ح و) = (ح و - ح و) (ح و - ح و) (ح و - ح و) (ح و - ح و) (ح و - ح و)$$

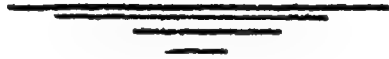
$$سا (ح و) = (ح و - ح و) (ح و - ح و) (ح و - ح و) (ح و - ح و) (ح و - ح و)$$

۸۔ ثابت کر دو کہ مساواتوں

$$ف (لا) = ۱ + ف (لا) + ف (لا) + \dots + \frac{۱}{۳ \times ۲ \times ۱} + \dots$$



۱۔ اگر لا کے تین متعامل ع، و، ہ ہوں چنگے درجے علی الترتیب  
 م، ن، م + ن - ۱ ہیں تو ثابت کرو کہ شکل ذیل کا ایک مماثل رشتہ موجود ہو گا۔  
 م ہ ≡ ع فہ (لا) + و پ (لا)  
 جہاں فہ (لا) اور پ (لا) علی الترتیب ن - ۱ اور م - ۱ درجے دریافت طلب  
 متعامل ہیں اور م، ع اور و کا حاصل استقاط ہے۔  
 ۱۱۔ م کی دفعہ ۱۵۱ میں دی ہوئی قیمت کو تفرق کرنے سے دفعہ ۱۵۲  
 کے نتیجوں کی تصدیق کرو۔



(91)

## پندرہواں باب

متشاكل تفاعلوں کو محسوب کرنا نیم غیر متغیر اور نیم ہم متغیر

۱۵۹۔ س اور ب ہم کیلئے ویزنگ (Waring) کے عام جملے

ساواتوں کی اصلوں کے متشاكل تفاعلوں کے اہم ترین خواص پہلے بحث ہو چکی ہے (دفعات ۲۷، ۲۸، آٹھواں باب جلد اول)۔ اس باب میں ہم چند مختلف مسئلوں کا اضافہ کرتے ہیں جو متشاكل تفاعلوں کو محسوب کرنے میں اکثر فائدہ کے ساتھ استعمال کئے جاسکتے ہیں۔ ہم پہلے وہ عام جملے بیان کریں گے جن کا حوالہ دفعہ ۱۵۹ میں دیا جا چکا ہے اور جو ویزنگ سے منسوب ہیں۔

(۱)  $n$  میں درجہ کی مساوات کے سروں  $b, b^2, b^3, \dots$  .... بن کی رقوم میں  $s$  م کے لئے عام جملہ۔  
ہمیں معلوم ہے

$$- \text{لوک } (1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1}) = \frac{1 - b^n}{1 - b} = \frac{1 - (b^n)}{1 - b}$$

$= s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + \dots + \frac{1}{n}s^n + \dots$  (دفعہ ۷۹)  
اب کثیر رقمی سلسلہ سے  $(b + b^2 + b^3 + \dots + b^n)$  کو پھیلانے



اور اوپر کی مساوات میں ما کے سروں کا مقابلہ کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{سلم} = \frac{(1) \text{م جا} (1 + 2 + \dots + \text{لج})}{\text{جا} (1 + 2 + \dots + \text{لج})} \text{پ ا ب پ} \dots \text{ب ل}$$

$$\text{جسمیں} \quad 1 + 2 + 3 + \dots + \text{لج} = \text{ر}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + \text{لج} = \text{م}$$

اور 1، 2، 3، ...، لج کو وہ تمام مثبت صحیح قیمتیں دینی چاہئیں

(بشمول صفر) جو ان دو مساواتوں میں سے آخری مساوات کو پورا کرتی ہیں۔ نیز ان میں سے کسی صحیح عدد کو ر سے تعبیر کیا جائے تو

(92)

$$\text{جا} (1 + 2 + 3 + \dots + \text{لج}) = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times \text{لج}$$

بشرطیکہ یہ مان لیا جائے کہ جا (1) = 1 جبکہ ر = 0۔

(2) اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں 1، 2، 3، ...، سلم، ...

م کی رقوم میں کسی سر ب م کے لئے عام جملہ۔

ہم جانتے ہیں

$$1 + 2 + 3 + \dots + \text{لج} + 1 + 2 + 3 + \dots + \text{لج} + 1 + 2 + 3 + \dots + \text{لج} + \dots$$

$$= 1 + 2 + 3 + \dots + \text{لج} + 1 + 2 + 3 + \dots + \text{لج} + 1 + 2 + 3 + \dots + \text{لج} + \dots$$

اس مساوات کی بائیں طرف کے اجزائے ضربی کو بھیلانے اور طرفین میں ما کے سروں کا مقابلہ کرنے سے گذشتہ مثال کی ترتیب کی بموجب ہم حاصل کرتے ہیں





اس مساوات کو ثابت کر نیکی لئے ہم دو دفعہ ۱۰ کی مساوات (۱۱) لیتے ہیں اور اس کو  $r$  کے لحاظ سے تفریق کرتے ہیں تو  $a$  کی مختلف قوتوں کے سروں کا مقابلہ کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{r^a}{r^b} = \dots = \frac{r^a}{r^b} > r^a \text{ جبکہ } r > 1, \frac{r^a}{r^b} = \dots = \frac{r^a}{r^b} < r^a \text{ جبکہ } r < 1$$

اور ان قیمتوں کو مساوات

$$\frac{r^a}{r^b} = \frac{r^a}{r^b} + \frac{r^a}{r^b} + \dots + \frac{r^a}{r^b} = \frac{r^a}{r^b} + \frac{r^a}{r^b} + \dots + \frac{r^a}{r^b}$$

$$+ \dots + \frac{r^a}{r^b} + \frac{r^a}{r^b}$$

میں درج کرنے سے اوپر لکھی ہوئی مساوات نور آئل جاتی ہے۔

## مثالیں

### ۱۔ مساوات

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  کی قیمت محسوب کرو۔  
کس متشاکل تفاعل کا رتبہ اور وزن معلوم کر نیکی بعد ہم اس کی قیمت کے حریفی حصے کو سروں کی رقوم میں لکھ سکے ہیں۔ یہاں  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  کا رتبہ ۱ ہے اور اس کا وزن  $n$  ہے۔ پس

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

جہاں  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  وغیرہ عددنا سر ہیں جبکہ معلوم کرنا ہے۔

$1 + 2 + 3 + \dots + n$  جیسی رقبہ اگرچہ صحیح وزن کی ہیں مگر ان کا رتبہ



۳۔ اسی سادات کیلئے  $\text{ح} \text{ع}^2 \text{ع}^2 \text{ع}^2$  کی قیمت محسوب کرو۔

یہاں وزن چھ اور رتبہ تین ہے۔ پس

$$\text{ح} \text{ع}^2 \text{ع}^2 \text{ع}^2 = \text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب}$$

+  $\text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب}$   
نیز  $\text{س}^2 \text{س}^2 \text{س}^2$ ، وغیرہ کی رقوم میں  $\text{ح}$  کو بیان کرنے سے (دفعہ ۱۲)

$$\text{ح} \text{ع}^2 \text{ع}^2 \text{ع}^2 = \text{س}^2 \text{س}^2 \text{س}^2 - \text{س}^2 \text{س}^2 - \text{س}^2 \text{س}^2 - \text{س}^2 \text{س}^2 + \text{س}^2 \text{س}^2$$

اب  $\text{س}^2$  کے لحاظ سے  $\text{ح}$  کی ان دو قیمتوں کو تفریق کرنے اور تفریق  
سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\text{ت} \text{ب} \text{جس سے} = \frac{\text{ت}}{۲} = ۲ \text{ یعنی ت} = ۱۲$$

(95)

$\text{س}^2$  کے لحاظ سے تفریق کرنے سے

$$\text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} = \text{س}^2 \text{س}^2 = ۵ - ۵ \text{ ب} = ۲ \text{ ت} = ۴$$

$\text{س}^2$  کے لحاظ سے تفریق کرنے سے

$$\text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} + \text{ت} \text{ب} = \text{س}^2 \text{س}^2 = ۴ - ۴ \text{ ب} = ۲ \text{ ت}$$

$$\text{جس سے} \quad \text{ت} + \text{ت} = ۸ \text{ ت} + \text{ت} = ۴$$

$$\text{اور اسلئے} \quad \text{ت} = ۲ \text{ ت} = ۴$$

نیز  $\text{ت} = ۰$  کیونکہ  $\text{ح}$  معدوم ہوتا ہے جب (ن-۲) اصلیں معدوم  
ہوں۔ اور  $\text{ت} = ۰$  اور  $\text{ت} = ۰$  معلوم ہو جاتے ہیں اگر ہم وہ صورت لیں  
جب (ن-۳) اصلیں معدوم ہوں کیونکہ اس صورت میں

$$\text{ح} \text{ع}^2 \text{ع}^2 \text{ع}^2 = \text{ع}^2 \text{ع}^2 \text{ع}^2 - \text{ع}^2 \text{ع}^2 = \text{ب}^2 - ۲ \text{ ب} + ۲ \text{ ب}^2$$

$$= \text{ب}^2 \text{ب}^2 \text{ب}^2 - ۲ \text{ ب}^2$$

اور اسلئے تہ = ۳، تہ = ۱ - اسلئے بالآخر

$$3 \text{ عم}^2 \text{ عم}^2 = ۱۲ \text{ ب} + ۴ \text{ ب} + ۴ \text{ ب} + ۴ \text{ ب} + ۳ \text{ ب} + ۳ \text{ ب} + ۳ \text{ ب} + ۳ \text{ ب}$$

$$+ \text{ب} + \text{ب} + \text{ب}$$

۱۶۲۔ کبھی کی اصلوں کے فرقوں کے تفاعل۔ اس دفعہ

اور دفعات ذیل میں وہ مسائل بیان کئے گئے ہیں جو کبھی اور چار درجی مساداتوں کی اصلوں کے متشاكل تفاعلوں کی چند مخصوص جماعتوں کو محسوس کرنے میں سب سے زیادہ مفید ہیں۔ یہ مسائل ان تفاعلوں کے متبوع غیر متغیروں اور ہم متغیروں کی تعداد متعین کرنے کے لحاظ سے بھی بڑی اہمیت رکھتے ہیں۔

مسئلہ ۱۔ مسادات

$$۱ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} = ۰$$

کی اصلوں کا ہر منطق اور صحیح متشاكل تفاعل فہ (عہ بہ) جس میں صرف ان اصلوں کے فرق شامل ہوتے ہیں  $\text{ب}^2$  سے ضرب کھانیکے بعد شکل فہ (بہ) یا گ فہ (بہ) میں بیان ہو سکتا ہے بموجب اسکے کہ فہ اصلوں کا جفت یا طاق تفاعل ہے جہاں فہ ایک منطق صحیح تفاعل ہے  $\text{ب}^2$  کا اور ہ رتبہ ہے فہ کا۔

پہلے حسب ذیل مسئلہ تہید یہ ثابت کرنا ضروری ہے:۔ ہ اور ہ کا

کوئی ایسا تفاعل وجود نہیں ہے جو اے سے تقسیم پذیر ہو۔  
کیونکہ اگر کوئی ایسا تفاعل (ھ، ۵) ہوتا تو اے کو معدوم کرنے سے  
ہیں ملنا چاہئے

[illegible]

جوہ اور ۵ کی قیمتیں ہیں جب کہ معدوم ہوا (دفعہ ۴۶)۔ یہ سادات  
صرحاً ناممکن ہے کیونکہ اگر ہم سادات ۵ = ۱۲ کی مدت سے ۱۲ کو  
ساقط کریں تو حاصل ہونیوالی سادات میں ۱۲ اور ۱۲ شامل ہونگے  
اور ۵ اور ۵ بھی۔

مسئلہ اثبات :- فہ چونکہ فرقوں کا تفاعل ہے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ وہ ایسے کبھی سے محسوس کیا گیا ہے جس میں اسکی دوسری رقم موجود نہیں ہے (دفعہ ۳۶)۔ اس لئے

(۲) فَا (ج) = فَ (بُہ گ)

جس میں فا ایک منطوق صحیح تفاعل ہے اور ر کو جو ہ سے کم نہیں ہو سکتا (دفعہ ۸۱) معلوم کرنا باقی ہے۔ بائیں طرف کے تفاعل کو آگ کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیکر ہم کہہ سکتے ہیں

بُذْذ (عَبْج) = فَا (رُ'ه) + گ (رُ'ه) + گ (رُ'ه) + فَا (رُ'ه) + ...

چونکہ کھ کا وزن جفت ہے اسلئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب 'فہ' اصلوں کا جفت تفاعل ہو (یعنے اس کا وزن جفت ہو) تو وہ سب ارقام جنہیں گ کی طاق قوتیں شامل ہوتی ہیں معدوم ہونی چاہئیں اور جب 'فہ' طاق تفاعل ہو تو غالباً اور وہ سب ارقام جنہیں گ کی جفت قوتیں شامل ہوں معدوم ہونی چاہئیں۔ موزر الذکر صورت میں گ کو جزو صیرفی کے طور پر لیتے اور ربط

$$\Delta \bar{r}_a = \bar{r}_a + \bar{r}_b \quad (\text{وضع ۴۲})$$





$$i' = (e' b) = (a' h) \Delta$$

اختیار کرتی ہے۔

اس طرح مسئلہ ثابت ہو گیا۔

۱۶۳۔ چار درجہ کی عملوں کے فرقوں کے تفاعل۔

دفعہ گذشتہ کے مسئلہ کے جواب میں چار درجی کے لئے حسب ذیل مسئلہ ہے۔

مسلمہ ۲ - مساوات

$$= 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

کی اصلوں کا ہر نطق اور صحیح متشاکل تفاعل نہ (عہدہ) جہ مضہ

جس میں صرف ان اصولوں کے فرق شامل ہوتے ہیں

اُس سے ضرب، کھانیکے بعد شکل (ا، ب، ح، ع، جے)

یا نگ فار (ا، ب، ط، ح) میں بیان ہو سکتا ہے بموجب

اسکے کہ فو اصلوں کا جفت یا طاق تفاعل ہے جہاں فا

ایک منطق صحیح متفاعل ہے 'ب' 'ھ' 'ع' ہے کا اور ہ رتبہ

۱۰۰۰

پہلے حسب ذیل مسئلہ تہیہ کا ثابت کرنا ضروری ہے:

۴۸ 'خ' بچے کا کوئی ایسا قائل موجود نہیں ہے جو اس سے تقسیم

نہیں کہہ سکتے۔ کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایسا تفاعل (ہ، ع، جے) ہو گا کہ جس سے ہمیں ان اناج سے

ہے تو! کو معدوم کرنے سے ہمیں ملنا چاہئے

وقال (هـ، ع، ج) =

$$Y - \equiv \Delta$$

جہاں

$$ع' = -۲، ۱، ۱، ۳ + ۱، ۱، ۱، ۱$$

$$جے = ۲، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ - ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱$$

جو 'ع' اور 'جے' کی قیمتیں ہیں جب '۱' معدوم ہو۔ لیکن ایسی مساوات متماثلہ کا وجود نہیں ہو سکتا کیونکہ '۱'، '۱'، '۱'، '۱' کو اس طور پر ساقط کرنا کہ صرف 'ع'، 'جے' کے درمیان ایک ربط حاصل ہونا ممکن ہے۔

اب دفعہ ماضی کے مطابق نہ چونکہ اصولوں کے فرقوں کا تفاعل ہے اسلئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ وہ ایسی چار درجہ مساوات سے محسوب کیا گیا ہے جس میں اسکی دوسری رقم موجود نہیں ہے (دفعہ ۲۷) پس

$$۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ = (۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱) + (۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱)$$

جس میں فائیک منطق مجموع تفاعل ہے اور ر کو معلوم کرنا باقی ہے۔ حسب سابق عمل کرنے سے

$$۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ = (۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱) + (۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱) + \dots$$

چونکہ '۱' اور '۱' دونوں تفاعل کے صورت میں وزن جفت ہے اسلئے دفعہ گذشتہ کے مطابق یہ رہا ہے کہ طاق تفاعلوں میں '۱' ایک جزو ضربی ہے اور ربط

$$۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ = (۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱) + (۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱)$$

کے ذریعہ '۱' کی جفت قوتوں کو ساقط کرنے سے یہ ثابت ہو جاتا ہے کہ '۱' نہ عمل

$$(۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱) + (۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱)$$

میں بیان ہو سکتا ہے بموجب اسکے کہ قد جفت یا طاق تفاعل ہو۔ اسلئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اصلوں کے ہر طاق تفاعل میں جو متذکرہ صدر جماعت سے متعلق ہے۔ جملہ

$$(ب + ج - ع - ض) (ج + ع - ب - ض) (ع + ب - ج - ض) \quad (\text{مثال ۲۰ دفعہ ۲۷})$$

جزو ضربی کے طور پر شریک ہونا چاہئے۔ اس جزو ضربی کو جدا کر کے اب ہم جفت تفاعل کی صورت میں رکھ متعین کرتے ہیں۔ ربط کو اس شکل

$$\begin{aligned} & (ب + ج - ع - ض) = (ب + ج - ع - ض) \quad \text{فا (ب + ج - ع - ض)} \\ & \text{میں لکھنے اور } (ب + ج - ع - ض) \text{ سے تقسیم کرنے سے ہمیں حسب دفعہ گزشتہ حاصل ہوتا ہے} \\ & (ب + ج - ع - ض) = (ب + ج - ع - ض) + \frac{\text{فا (ب + ج - ع - ض)}}{ب} \end{aligned}$$

اب چونکہ بائیں طرف کا جملہ سرور کا ایک صحیح تفاعل ہونا چاہئے (دفعہ ۱۶) اور چونکہ ثابت کردہ تہید یہ کی رو سے ۳ میں داخل ہو نیوالی کوئی رقم غیر کمسور صورت میں بیان نہیں ہو سکتی اسلئے

$$(ب + ج - ع - ض) = (ب + ج - ع - ض) \quad \text{اس طرح مسئلہ ثابت ہو گیا۔}$$

اس باب کے ختم پر ایسی مثالیں ملتی ہیں چار درجہ کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کو محسوب کرنے میں اس مسئلہ کے استعمال سے فائدہ اٹھایا جاسکتا ہے۔

۱۶۴۔ نیم غیر متغیر اور نیم ہم متغیر۔ فرض کرو کہ ثنائی سروں کے ساتھ لکھی ہوئی عام مساوات

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \dots + 1 = 0$$





۱) مف نہ (عم، عم، عم، ...، عم) = عف (لا، لا، لا، ...، لا)

اور اسلئے عاملوں مف اور عف کو متواتر استعمال کرنے سے

۲) مف نہ (عم، عم، عم، ...، عم) = عف (لا، لا، لا، ...، لا)

اسلئے پھیلاؤ (۲) سے ہم یہ استنباط کر سکتے ہیں کہ

فا (ع، ع، ع، ...، ع) = فبا۔ عف فبا۔ لا عف فبا۔ ...

پس ان دو عاملوں (یعنی سروں) کی رقوم میں عف اور اصلوں رقوم میں مف کی مدد سے مساوات (۱) کے کسی طرف کے رکن کو ہم لا کی قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں۔ مف کے متواتر استعمال کے ذریعہ اصلوں کے تفاعلوں کا ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے اور عف کے ذریعہ ان تفاعلوں کے جواب میں انہی قیمتیں سے دور کی رقوم میں ملتی ہیں۔

مجموعہ بالانتہا اسی طرح درست رہتے ہیں کہ تفاعل مف نہ میں دو یا دو سے زیادہ مساواتوں کی املیں شامل ہوں۔ ایسی صورت میں فا، ان مساواتوں کے سروں کی رقوم میں متناظر قیمت کو تعبیر کر سکتا ہے اور عف اور عف کی بجائے ہر مساوات کے لحاظ سے اسی طرح کے عاملوں کے مجموعے ہونگے۔

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ جب 'مف نہ' متناظر معدوم ہوتا ہے تو مف (مف، مف، مف، ...، مف) یا مف (فب، فب، فب، ...، فب) وغیرہ اور اسلئے مساوات (۱) کے پہلے رکن کے پھیلاؤ میں لا معدوم ہوتا ہے اب یہ صرف اسوقت واقع ہو سکتا ہے جبکہ 'مف نہ' مقداروں ع، ع، ع، ...، ع کے فرقوں کا تفاعل ہو۔ پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ اگر فا (لا، لا، لا، ...، لا) نیم غیر متغیر ہو تو

(۱)

عف فا (۱، ۲، ۳، ...، ۱۰) =

جب رتبہ اور وزن معلوم ہوں تو نیم غیر متغیر میں عددی سروں کو متعین کر نیکیے لئے اوپر کی متماثلہ مساوات اکثر کافی ہے۔ اگر ایک ہی رتبہ اور وزن کے دو یا دو سے زیادہ نیم غیر متغیر ہوں تو عف کے محل سے اتنی مساواتیں نہیں ملینگی جتنی تمام مفروضہ سروں کو متعین کر نیکیے لئے کافی ہونی چاہئیں۔ یہ بات ذمہ آئندہ سے واضح ہو جائے گی۔ اگر مطلوبہ رتبہ اور وزن کا کوئی نیم غیر متغیر موجود نہ ہو تو سب کے سب سر معدوم ہو جائیں گے۔

۱۶۵۔ نیم غیر متغیروں کی تعین۔ ایک کثیر رقمی کے دے ہوئے رتبہ (۱) اور وزن (۲) کے نیم غیر متغیر کو معلوم کر نیکا مسئلہ وہی ہے جو تعریفی مساوات

$$\text{عف فم} = ۱ \cdot \frac{\text{فر فم}}{\text{فر ۱}} + ۲ \cdot \frac{\text{فر فم}}{\text{فر ۲}} + \dots + n \cdot \frac{\text{فر فم}}{\text{فر ۱}} = (۱)$$

کے ایسے تمام حل متعین کر نیکا ہے۔

اس مساوات کو حل کر نیکیے لئے (اگر اسکا حل کرنا ممکن ہو) فرض کرو کہ

$$\text{فم} = ۱ \cdot \text{فر ۱} + ۲ \cdot \text{فر ۲} + \dots + n \cdot \text{فر ۱} \quad (۲)$$

جہاں ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰ کے تمام ممکن اجتماع جن کا رتبہ ۵ اور

وزن ۲ ہے ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰ فر ہیں اور جہاں ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰ فر اختیارى اجزائے ضربى ہیں۔

اب فم کی اس قیمت کو مساوات عف فم = میں درج کرنے سے

$$۱ \cdot \text{سا ۱} + ۲ \cdot \text{سا ۲} + \dots + ۱۰ \cdot \text{سا ۱} =$$





مساواتوں (۳) اور (۴) کو  $ل_1, ل_2, \dots, ل_n$  کیلئے حل کرنے اور مساوات (۲) میں درج کرنے سے ہمیں  $ف =$  کے لئے ذیل کی قیمت ملتی ہے:-

$$\Delta ف = ل_1 ل_2 + ل_1 ل_3 + ل_1 ل_4 + \dots + ل_1 ل_n$$

$$\text{اور اسلئے } \Delta ع ف = ل_1 ع ف + ل_2 ع ف + \dots + ل_n ع ف = 0$$

$$\text{جس سے } ع ف = 0, \dots, ع ف = 0$$

کیونکہ  $ل_1, ل_2, \dots, ل_n$  کوئی قیمتیں اختیار کر سکتے ہیں۔

پس ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ اس صورت میں خطی طور پر غیر تابع نیم غیر متغیروں کی تعداد  $ر = ف = 0$  ہے۔

(۲) جب  $ف = 0$  کے مساوی یا  $ر$  سے بڑا ہوتا ہے تو مساواتیں

$$ل_1 = 0, ل_2 = 0, \dots, ل_n = 0$$

بالعموم پوری نہیں ہو سکتیں اور اسلئے کثیر رمتی کے کوئی ایسے نیم غیر متغیر نہیں ہیں جنکا رتبہ ۰ اور وزن کہ ہے۔

(۳) جب  $ف = 0$  اور  $ل_1, ل_2, \dots, ل_n$  کو متعین کر کے لئے مساواتوں کی تعداد عین کافی ہوتی ہے اور اسلئے صرف ایک نیم غیر متغیر موجود ہوتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ کیسی کیلئے دو نیم غیر متغیر معلوم کرو جسکا رتبہ اور وزن دونوں تین ہیں۔  
مان لو

$$ف = ل_1 ل_2 + ل_1 ل_3 + ل_2 ل_3$$











جہاں  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$

۳ - مساواتوں

$$F_1 = F_2 + \dots + F_n = T_1$$

$$F_2 = F_1 + \dots + F_n = T_2$$

$$F_3 = F_1 + \dots + F_n = T_3$$

$$F_1 - F_2 + \dots + F_n - F_1 = T_1 - T_2$$

سے  $F_1, F_2, \dots, F_n, F_1$  فی معلوم کرد۔

یہ توسیع ہے مثال ۱ صفحہ (۶۰) کی جسکو حل کیا جا چکا ہے۔

وہاں جو طریقہ استعمال کیا گیا ہے اسکو استعمال کرنے سے یہ فوراً معلوم ہو جائیگا کہ مساوات

$$= \begin{vmatrix} 1 & F_1 & \dots & F_n & F_1 - F_2 \\ S_1 & S_1 & \dots & S_1 & T_1 - T_2 \\ S_2 & S_2 & \dots & S_2 & T_2 - T_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_{n-1} & \dots & S_{n-1} & T_{n-1} - T_n \end{vmatrix}$$

سے  $F_1, F_2$  کے (۱ - ۱) ویں درجہ کے تفاعل کے طور پر حاصل ہوتا ہے۔ مساوات بالا میں

$$S_1 = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$



۴۔ ثابت کرو کہ

$$\Pi \equiv \text{ا}^2 (\text{ب} - \text{ج})^2 (\text{ع} - \text{ه})^2 (\text{ب} - \text{د})^2 (\text{ع} - \text{ه})^2 (\text{ب} - \text{ج})^2 (\text{ا} - \text{د})^2$$

$$= \text{ل} \text{ع}^2 + \text{م} \text{ج}^2$$

جہاں  $\text{م} = -2\text{ل}$ ۔

ہم دفعہ ۱۶۳ کے مسئلہ سے استفادہ کرتے ہیں اور اصلوں کے دئے ہوئے تفاعل کو جسکا رتبہ ۶ اور وزن ۱۲ ہے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ه'، 'ع' کے رقوم میں بیان کرتے ہیں۔ جدول

(۱)

رتبہ	وزن	
۲	۲	ا
۲	۲	ب
۳	۶	ج

یہ دیکھنا آسان ہے کہ اصلوں کے دئے ہوئے تفاعل کی قیمت میں 'ا' داخل نہیں ہو سکتا کیونکہ چھٹے رتبہ کی وہ ارقام جنہیں 'ا' داخل ہوتا ہے 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ه'، 'ع' ہیں اور یہ ارقام مطلوبہ وزن کی نہیں ہیں۔ پس  $\Pi$  کی شکل  $\text{ل} \text{ع}^2 + \text{م} \text{ج}^2$  ہونی چاہئے جہاں 'ل' اور 'م' عددی سرریاں۔ اب 'ا' اور 'ب' کو صفر کے مساوی رکھو تو  $\Pi$  معدوم ہو جائیگا کیونکہ اس صورت میں چار درجی میں مساوی اصلیں ہوں گی۔ پس 'ع' اور 'ج' کی تحویل شدہ قیمتوں کو استعمال کرنے سے

$$= \text{ل} (\text{ا}^2 + \text{ب}^2) + \text{م} (-\text{ا}^2) \text{ اور اسلئے } \text{م} = -2\text{ل}$$

متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں حاصل کرنے میں یہ طریقہ استعمال کرتے وقت ہر صورت میں حسب ذیل قاعدہ کی پابندی کرنی چاہئے:۔ وزن کہ کی وہ رقمیں باقی رکھو جسکا وزن ۵ سے بڑا نہ ہو اور 'ا' کی مناسب قوتوں سے ان رقموں کو ضرب دیکر پورے جملہ کو متجانس بناؤ۔

۵۔ چار درجہ کی اصولوں کے متشاکل تفاعل

$$\Sigma (ب - ج) + (ج - ع) + (ع - ی) = ۰$$

کو محسوب کرو۔

چونکہ اس متشاکل تفاعل کا رتبہ چار اور وزن چہرہ ہے اسلئے ہم فرض کر سکتے ہیں

۱.  $\Sigma (ب - ج) + (ج - ع) + (ع - ی) = ۰$  لہذا  $ل + ۶ + ۱ = ۰$  (۱)  
پہلی مثال کی طرح  $ل = ۰$  رکھنے سے اور تحویل شدہ متشاکل تفاعل (جبکہ  $ج = ۰$ ،  $ع = ۰$ ) کی قیمت کو دو درجہ مساوات

۱.  $ل + ۶ + ۱ = ۰$  سے  $ل = -۷$  اور  $م$  کی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں کیونکہ تحویل شدہ متشاکل تفاعل کی اس قیمت کو  $ل + ۶ + ۱ = ۰$  کی تحویل شدہ قیمت کے مساوی رکھنے سے دو مفرد مساواتیں ملتی ہیں جسے  $ل$  اور  $م$  کی تعین ہو سکتی ہے۔ یا ہم اس طرح عمل کر سکتے ہیں دو چار درجہ مساواتیں لوجیکی اصلیں معلوم ہوں اور ہر صورت میں اصولوں کو عملاً درج کر کے متشاکل تفاعل کی قیمت کو محسوب کرو اور پھر مساوات کی دونوں طرفوں کا مقابلہ کرو جبکہ  $ل = ۰$ ،  $ع = ۰$  کی جگہ ان کی وہ قیمتیں ہو جو عددی سرور سے محسوب کی گئی ہیں۔

پہلے ہم چار درجہ مساوات  $ل + ۶ + ۱ = ۰$  لیتے ہیں جسکی اصلیں ہیں ۱، ۱، ۱، ۱۔ پس

$$\Sigma = ۸، ل = -۶، ع = ۳، ب = ۱$$

مساوات (۱) میں درج کرنے سے

$$ل + ۳ = -۱۷$$

اسی طرح چار درجہ مساوات  $ل + ۶ + ۱ = ۰$  پر عمل کرنے سے جسکی اصلیں  $۱، ۱، ۱، ۱$  ہیں ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\Sigma = ۸، ل = -۱، ع = ۸، ب = -۴$$









۱۴۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} & \text{ا}^{\text{ب}} \text{ج} + \text{ج} - \text{ع} - \text{ض}^{\text{ا}} \text{د} - \text{ب} - \text{ج}^{\text{ا}} \text{ع} - \text{ع} - \text{ض}^{\text{ا}} \\ & = ۵۱۲ (\text{ا}^{\text{ب}} \text{ع} - ۲۶ \text{ا}^{\text{ب}} \text{ج} + ۱۲ \text{ا}^{\text{ب}} \text{ع}) \end{aligned}$$

۱۵۔ اگر ایک سادہ متبادلہ (یعنی وہ جس میں ہر عنصر کی قوت

ایک ہو) کو فرقوں کے حاصل ضرب (دیکھو مثال ۳ صفحہ ۹۲) سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت کو ایک مقطع کی شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے جس کے عناصر میں داخل ہونیوالی مقداروں کے متجانس حاصل ضربوں کے مجموعے ہیں ہم تیسرے رتبہ کا ایک مقطع لیتے ہیں اور ثابت کرتے ہیں

$$\begin{vmatrix} \text{ع}^{\text{ا}} & \text{ع}^{\text{ب}} & \text{ع}^{\text{ج}} \\ \text{ا}^{\text{ب}} & \text{ا}^{\text{ج}} & \text{ا}^{\text{د}} \\ \text{ب}^{\text{ا}} & \text{ب}^{\text{ب}} & \text{ب}^{\text{ج}} \\ \text{ج}^{\text{ا}} & \text{ج}^{\text{ب}} & \text{ج}^{\text{ج}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}^{\text{ب}} & \text{ا}^{\text{ج}} & \text{ا}^{\text{د}} \\ \text{ب}^{\text{ا}} & \text{ب}^{\text{ب}} & \text{ب}^{\text{ج}} \\ \text{ج}^{\text{ا}} & \text{ج}^{\text{ب}} & \text{ج}^{\text{ج}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{ا}^{\text{ب}} & \text{ا}^{\text{ج}} & \text{ا}^{\text{د}} \\ \text{ب}^{\text{ا}} & \text{ب}^{\text{ب}} & \text{ب}^{\text{ج}} \\ \text{ج}^{\text{ا}} & \text{ج}^{\text{ب}} & \text{ج}^{\text{ج}} \end{vmatrix}$$

جہاں 'ا'، 'ب'، 'ج' وغیرہ اصلوں 'ع'، 'ب'، 'ج' کے متجانس حاصل ضربوں کے مجموعے ہیں جیسا کہ دفعہ ۸۳ جلد اول میں تعریف کی گئی تھی۔ طریقہ ذیل بالکل عام ہے۔ حسب ذیل متانکہ موجود آسانی کے ساتھ ثابت ہو جاتی ہے:-

$$\begin{vmatrix} \frac{\text{ا}}{\text{ا} - \text{ع}} & \frac{\text{ب}}{\text{ب} - \text{ع}} & \frac{\text{ج}}{\text{ج} - \text{ع}} \\ \frac{\text{ا}}{\text{ا} - \text{ب}} & \frac{\text{ب}}{\text{ب} - \text{ب}} & \frac{\text{ج}}{\text{ج} - \text{ب}} \\ \frac{\text{ا}}{\text{ا} - \text{ج}} & \frac{\text{ب}}{\text{ب} - \text{ج}} & \frac{\text{ج}}{\text{ج} - \text{ج}} \end{vmatrix}$$

۱	۲	۳
ع	ع	ی
۱	۲	۳
ب	ب	ی
۱	۲	۳
ج	ج	ی

≡ (لا-ع) (لا-ب) (لا-ج) (ما-ع) (ما-ب) (ما-ج) (ی-ع) (ی-ب) (ی-ج)  
 بائیں طرف کے پہلے ستون کے ہر عنصر کے نیچے (لا-ع) (لا-ب) (لا-ج)  
 مقسوم علیہ کے طور پر لکھو دوسرے ستون کے ہر عنصر کے نیچے (ما-ع) (ما-ب) (ما-ج)  
 (ما-ب) (ما-ج) اور تیسرے ستون کے ہر عنصر کے نیچے (ی-ع) (ی-ب) (ی-ج) x  
 (ی-ب) (ی-ج) - پھر حسب ذیل نمونے کی مساداتوں سے (مثال ۱)  
 دفعہ ۸۳ اندراج کرو:-

$$\frac{لا}{لا-ع} = ۱ + ع لا + ع لا + ... + ع لا + ...$$

$$(111) \quad \frac{لا}{لا-ع} = ۱ + ع لا + ع لا + ... + ع لا + ...$$

$$\frac{لا}{لا-ع} = ۱, \frac{ما}{ما-ع} = ۱, \frac{ی}{ی-ع} = ۱$$

تب مندرجہ بالا متاثر ہو جاتی ہے

$$\begin{vmatrix} ۱ + ع لا + ... + ع لا + ... & ۱ + ع لا + ... + ع لا + ... & ۱ + ع لا + ... + ع لا + ... \\ ۱ + ب لا + ... + ب لا + ... & ۱ + ب لا + ... + ب لا + ... & ۱ + ب لا + ... + ب لا + ... \\ ۱ + ج لا + ... + ج لا + ... & ۱ + ج لا + ... + ج لا + ... & ۱ + ج لا + ... + ج لا + ... \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ + ع لا + ... + ع لا + ... & ۱ + ع لا + ... + ع لا + ... & ۱ + ع لا + ... + ع لا + ... \\ ۱ + ب لا + ... + ب لا + ... & ۱ + ب لا + ... + ب لا + ... & ۱ + ب لا + ... + ب لا + ... \\ ۱ + ج لا + ... + ج لا + ... & ۱ + ج لا + ... + ج لا + ... & ۱ + ج لا + ... + ج لا + ... \end{vmatrix} \equiv$$



جہاں ان مقطعوں کے دوسرے اور تیسرے ستون، لا کی بجائے ما اور ی رکھنے سے ہیا کئے جاسکتے ہیں۔ طرفین میں لاٹ ماٹ ی کے سروں کا مقابلہ کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔ یہ یاد رہے کہ جب فرقوں کے حاصل ضرب کا مقطع اوپر کی شکل میں (یعنی ستونوں کی ترتیب میں صعودی قوتوں کے ساتھ) لکھا جاتا ہے تو حاصل ضرب کی علامت ہمیشہ مثبت ہوتی ہے کیونکہ ان دو مقطعوں کے حاصل ضرب میں جنہیں رسم

۱۔ ۲۔ ۳۔ ۴۔ ۵۔ ۶۔ ۷۔ ۸۔ ۹۔ ۱۰۔ ۱۱۔ ۱۲۔ ۱۳۔ ۱۴۔ ۱۵۔ ۱۶۔ ۱۷۔ ۱۸۔ ۱۹۔ ۲۰۔ ۲۱۔ ۲۲۔ ۲۳۔ ۲۴۔ ۲۵۔ ۲۶۔ ۲۷۔ ۲۸۔ ۲۹۔ ۳۰۔ ۳۱۔ ۳۲۔ ۳۳۔ ۳۴۔ ۳۵۔ ۳۶۔ ۳۷۔ ۳۸۔ ۳۹۔ ۴۰۔ ۴۱۔ ۴۲۔ ۴۳۔ ۴۴۔ ۴۵۔ ۴۶۔ ۴۷۔ ۴۸۔ ۴۹۔ ۵۰۔ ۵۱۔ ۵۲۔ ۵۳۔ ۵۴۔ ۵۵۔ ۵۶۔ ۵۷۔ ۵۸۔ ۵۹۔ ۶۰۔ ۶۱۔ ۶۲۔ ۶۳۔ ۶۴۔ ۶۵۔ ۶۶۔ ۶۷۔ ۶۸۔ ۶۹۔ ۷۰۔ ۷۱۔ ۷۲۔ ۷۳۔ ۷۴۔ ۷۵۔ ۷۶۔ ۷۷۔ ۷۸۔ ۷۹۔ ۸۰۔ ۸۱۔ ۸۲۔ ۸۳۔ ۸۴۔ ۸۵۔ ۸۶۔ ۸۷۔ ۸۸۔ ۸۹۔ ۹۰۔ ۹۱۔ ۹۲۔ ۹۳۔ ۹۴۔ ۹۵۔ ۹۶۔ ۹۷۔ ۹۸۔ ۹۹۔ ۱۰۰۔ ۱۰۱۔ ۱۰۲۔ ۱۰۳۔ ۱۰۴۔ ۱۰۵۔ ۱۰۶۔ ۱۰۷۔ ۱۰۸۔ ۱۰۹۔ ۱۱۰۔ ۱۱۱۔ ۱۱۲۔ ۱۱۳۔ ۱۱۴۔ ۱۱۵۔ ۱۱۶۔ ۱۱۷۔ ۱۱۸۔ ۱۱۹۔ ۱۲۰۔ ۱۲۱۔ ۱۲۲۔ ۱۲۳۔ ۱۲۴۔ ۱۲۵۔ ۱۲۶۔ ۱۲۷۔ ۱۲۸۔ ۱۲۹۔ ۱۳۰۔ ۱۳۱۔ ۱۳۲۔ ۱۳۳۔ ۱۳۴۔ ۱۳۵۔ ۱۳۶۔ ۱۳۷۔ ۱۳۸۔ ۱۳۹۔ ۱۴۰۔ ۱۴۱۔ ۱۴۲۔ ۱۴۳۔ ۱۴۴۔ ۱۴۵۔ ۱۴۶۔ ۱۴۷۔ ۱۴۸۔ ۱۴۹۔ ۱۵۰۔ ۱۵۱۔ ۱۵۲۔ ۱۵۳۔ ۱۵۴۔ ۱۵۵۔ ۱۵۶۔ ۱۵۷۔ ۱۵۸۔ ۱۵۹۔ ۱۶۰۔ ۱۶۱۔ ۱۶۲۔ ۱۶۳۔ ۱۶۴۔ ۱۶۵۔ ۱۶۶۔ ۱۶۷۔ ۱۶۸۔ ۱۶۹۔ ۱۷۰۔ ۱۷۱۔ ۱۷۲۔ ۱۷۳۔ ۱۷۴۔ ۱۷۵۔ ۱۷۶۔ ۱۷۷۔ ۱۷۸۔ ۱۷۹۔ ۱۸۰۔ ۱۸۱۔ ۱۸۲۔ ۱۸۳۔ ۱۸۴۔ ۱۸۵۔ ۱۸۶۔ ۱۸۷۔ ۱۸۸۔ ۱۸۹۔ ۱۹۰۔ ۱۹۱۔ ۱۹۲۔ ۱۹۳۔ ۱۹۴۔ ۱۹۵۔ ۱۹۶۔ ۱۹۷۔ ۱۹۸۔ ۱۹۹۔ ۲۰۰۔ ۲۰۱۔ ۲۰۲۔ ۲۰۳۔ ۲۰۴۔ ۲۰۵۔ ۲۰۶۔ ۲۰۷۔ ۲۰۸۔ ۲۰۹۔ ۲۱۰۔ ۲۱۱۔ ۲۱۲۔ ۲۱۳۔ ۲۱۴۔ ۲۱۵۔ ۲۱۶۔ ۲۱۷۔ ۲۱۸۔ ۲۱۹۔ ۲۲۰۔ ۲۲۱۔ ۲۲۲۔ ۲۲۳۔ ۲۲۴۔ ۲۲۵۔ ۲۲۶۔ ۲۲۷۔ ۲۲۸۔ ۲۲۹۔ ۲۳۰۔ ۲۳۱۔ ۲۳۲۔ ۲۳۳۔ ۲۳۴۔ ۲۳۵۔ ۲۳۶۔ ۲۳۷۔ ۲۳۸۔ ۲۳۹۔ ۲۴۰۔ ۲۴۱۔ ۲۴۲۔ ۲۴۳۔ ۲۴۴۔ ۲۴۵۔ ۲۴۶۔ ۲۴۷۔ ۲۴۸۔ ۲۴۹۔ ۲۵۰۔ ۲۵۱۔ ۲۵۲۔ ۲۵۳۔ ۲۵۴۔ ۲۵۵۔ ۲۵۶۔ ۲۵۷۔ ۲۵۸۔ ۲۵۹۔ ۲۶۰۔ ۲۶۱۔ ۲۶۲۔ ۲۶۳۔ ۲۶۴۔ ۲۶۵۔ ۲۶۶۔ ۲۶۷۔ ۲۶۸۔ ۲۶۹۔ ۲۷۰۔ ۲۷۱۔ ۲۷۲۔ ۲۷۳۔ ۲۷۴۔ ۲۷۵۔ ۲۷۶۔ ۲۷۷۔ ۲۷۸۔ ۲۷۹۔ ۲۸۰۔ ۲۸۱۔ ۲۸۲۔ ۲۸۳۔ ۲۸۴۔ ۲۸۵۔ ۲۸۶۔ ۲۸۷۔ ۲۸۸۔ ۲۸۹۔ ۲۹۰۔ ۲۹۱۔ ۲۹۲۔ ۲۹۳۔ ۲۹۴۔ ۲۹۵۔ ۲۹۶۔ ۲۹۷۔ ۲۹۸۔ ۲۹۹۔ ۳۰۰۔ ۳۰۱۔ ۳۰۲۔ ۳۰۳۔ ۳۰۴۔ ۳۰۵۔ ۳۰۶۔ ۳۰۷۔ ۳۰۸۔ ۳۰۹۔ ۳۱۰۔ ۳۱۱۔ ۳۱۲۔ ۳۱۳۔ ۳۱۴۔ ۳۱۵۔ ۳۱۶۔ ۳۱۷۔ ۳۱۸۔ ۳۱۹۔ ۳۲۰۔ ۳۲۱۔ ۳۲۲۔ ۳۲۳۔ ۳۲۴۔ ۳۲۵۔ ۳۲۶۔ ۳۲۷۔ ۳۲۸۔ ۳۲۹۔ ۳۳۰۔ ۳۳۱۔ ۳۳۲۔ ۳۳۳۔ ۳۳۴۔ ۳۳۵۔ ۳۳۶۔ ۳۳۷۔ ۳۳۸۔ ۳۳۹۔ ۳۴۰۔ ۳۴۱۔ ۳۴۲۔ ۳۴۳۔ ۳۴۴۔ ۳۴۵۔ ۳۴۶۔ ۳۴۷۔ ۳۴۸۔ ۳۴۹۔ ۳۵۰۔ ۳۵۱۔ ۳۵۲۔ ۳۵۳۔ ۳۵۴۔ ۳۵۵۔ ۳۵۶۔ ۳۵۷۔ ۳۵۸۔ ۳۵۹۔ ۳۶۰۔ ۳۶۱۔ ۳۶۲۔ ۳۶۳۔ ۳۶۴۔ ۳۶۵۔ ۳۶۶۔ ۳۶۷۔ ۳۶۸۔ ۳۶۹۔ ۳۷۰۔ ۳۷۱۔ ۳۷۲۔ ۳۷۳۔ ۳۷۴۔ ۳۷۵۔ ۳۷۶۔ ۳۷۷۔ ۳۷۸۔ ۳۷۹۔ ۳۸۰۔ ۳۸۱۔ ۳۸۲۔ ۳۸۳۔ ۳۸۴۔ ۳۸۵۔ ۳۸۶۔ ۳۸۷۔ ۳۸۸۔ ۳۸۹۔ ۳۹۰۔ ۳۹۱۔ ۳۹۲۔ ۳۹۳۔ ۳۹۴۔ ۳۹۵۔ ۳۹۶۔ ۳۹۷۔ ۳۹۸۔ ۳۹۹۔ ۴۰۰۔ ۴۰۱۔ ۴۰۲۔ ۴۰۳۔ ۴۰۴۔ ۴۰۵۔ ۴۰۶۔ ۴۰۷۔ ۴۰۸۔ ۴۰۹۔ ۴۱۰۔ ۴۱۱۔ ۴۱۲۔ ۴۱۳۔ ۴۱۴۔ ۴۱۵۔ ۴۱۶۔ ۴۱۷۔ ۴۱۸۔ ۴۱۹۔ ۴۲۰۔ ۴۲۱۔ ۴۲۲۔ ۴۲۳۔ ۴۲۴۔ ۴۲۵۔ ۴۲۶۔ ۴۲۷۔ ۴۲۸۔ ۴۲۹۔ ۴۳۰۔ ۴۳۱۔ ۴۳۲۔ ۴۳۳۔ ۴۳۴۔ ۴۳۵۔ ۴۳۶۔ ۴۳۷۔ ۴۳۸۔ ۴۳۹۔ ۴۴۰۔ ۴۴۱۔ ۴۴۲۔ ۴۴۳۔ ۴۴۴۔ ۴۴۵۔ ۴۴۶۔ ۴۴۷۔ ۴۴۸۔ ۴۴۹۔ ۴۵۰۔ ۴۵۱۔ ۴۵۲۔ ۴۵۳۔ ۴۵۴۔ ۴۵۵۔ ۴۵۶۔ ۴۵۷۔ ۴۵۸۔ ۴۵۹۔ ۴۶۰۔ ۴۶۱۔ ۴۶۲۔ ۴۶۳۔ ۴۶۴۔ ۴۶۵۔ ۴۶۶۔ ۴۶۷۔ ۴۶۸۔ ۴۶۹۔ ۴۷۰۔ ۴۷۱۔ ۴۷۲۔ ۴۷۳۔ ۴۷۴۔ ۴۷۵۔ ۴۷۶۔ ۴۷۷۔ ۴۷۸۔ ۴۷۹۔ ۴۸۰۔ ۴۸۱۔ ۴۸۲۔ ۴۸۳۔ ۴۸۴۔ ۴۸۵۔ ۴۸۶۔ ۴۸۷۔ ۴۸۸۔ ۴۸۹۔ ۴۹۰۔ ۴۹۱۔ ۴۹۲۔ ۴۹۳۔ ۴۹۴۔ ۴۹۵۔ ۴۹۶۔ ۴۹۷۔ ۴۹۸۔ ۴۹۹۔ ۵۰۰۔ ۵۰۱۔ ۵۰۲۔ ۵۰۳۔ ۵۰۴۔ ۵۰۵۔ ۵۰۶۔ ۵۰۷۔ ۵۰۸۔ ۵۰۹۔ ۵۱۰۔ ۵۱۱۔ ۵۱۲۔ ۵۱۳۔ ۵۱۴۔ ۵۱۵۔ ۵۱۶۔ ۵۱۷۔ ۵۱۸۔ ۵۱۹۔ ۵۲۰۔ ۵

۱۶۔ مثال ماضی کی رو سے ثابت کرو کہ

ع	ع		ط	ط	ط	=	ع	ع	
ز	ز		ط	ط	.		ز	ز	
ح	ح		ط	ط	.		ح	ح	

اس لئے اگر دئے ہوئے منقطع کو فرقوں کے حاصل ضرب سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت  $\frac{A}{B}$ ,  $\frac{C}{D}$  - اہم ہے جبکہ  $\frac{C}{D} + \frac{E}{F} + \frac{G}{H} + \frac{I}{J}$  عا بہ جہ کے مساوی ثابت کیا جاسکتا ہے۔

۱۷۔ مثال ۱۵ کے طریقہ سے ثابت کرو کہ

1-ن	1-ن
2-ع	2-ع
3-ع	3-ع
4-ع	4-ع
5-ع	5-ع
6-ع	6-ع
7-ع	7-ع
8-ع	8-ع
9-ع	9-ع
10-ع	10-ع
11-ع	11-ع
12-ع	12-ع
13-ع	13-ع
14-ع	14-ع
15-ع	15-ع
16-ع	16-ع
17-ع	17-ع
18-ع	18-ع
19-ع	19-ع
20-ع	20-ع
21-ع	21-ع
22-ع	22-ع
23-ع	23-ع
24-ع	24-ع
25-ع	25-ع
26-ع	26-ع
27-ع	27-ع
28-ع	28-ع
29-ع	29-ع
30-ع	30-ع
31-ع	31-ع
32-ع	32-ع
33-ع	33-ع
34-ع	34-ع
35-ع	35-ع
36-ع	36-ع
37-ع	37-ع
38-ع	38-ع
39-ع	39-ع
40-ع	40-ع
41-ع	41-ع
42-ع	42-ع
43-ع	43-ع
44-ع	44-ع
45-ع	45-ع
46-ع	46-ع
47-ع	47-ع
48-ع	48-ع
49-ع	49-ع
50-ع	50-ع
51-ع	51-ع
52-ع	52-ع
53-ع	53-ع
54-ع	54-ع
55-ع	55-ع
56-ع	56-ع
57-ع	57-ع
58-ع	58-ع
59-ع	59-ع
60-ع	60-ع
61-ع	61-ع
62-ع	62-ع
63-ع	63-ع
64-ع	64-ع
65-ع	65-ع
66-ع	66-ع
67-ع	67-ع
68-ع	68-ع
69-ع	69-ع
70-ع	70-ع
71-ع	71-ع
72-ع	72-ع
73-ع	73-ع
74-ع	74-ع
75-ع	75-ع
76-ع	76-ع
77-ع	77-ع
78-ع	78-ع
79-ع	79-ع
80-ع	80-ع
81-ع	81-ع
82-ع	82-ع
83-ع	83-ع
84-ع	84-ع
85-ع	85-ع
86-ع	86-ع
87-ع	87-ع
88-ع	88-ع
89-ع	89-ع
90-ع	90-ع
91-ع	91-ع
92-ع	92-ع
93-ع	93-ع
94-ع	94-ع
95-ع	95-ع
96-ع	96-ع
97-ع	97-ع
98-ع	98-ع
99-ع	99-ع
100-ع	100-ع

جہاں  $m = 1$  یا  $n = 1$  -  
 اس نتیجہ کو بالراست مثال ۱ دفعہ ۸۳ سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

# سوطحوں باب

## ہم متغیر اور غیر متغیر

(112)

۱۶۶۔ تعریف۔ اس باب میں اور آئندہ ابواب میں ترمیم

( ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰ )

کثیر رقمی

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

کو تبصیر کرنے کے لئے استعمال کیا جائیگا۔ یہ کثیر رقمی لا اور ما میں متجانس تفاعل ہے اور اس کے سرشاری سپر ہیں۔ اگر ہم  $1 = 1$  رکھیں تو یہ کثیر رقمی دفعہ ۳۵ کا عن ہو جاتا ہے۔ یہی ترمیم لا اور ما کے مندرجہ بالا متجانس تفاعل کو تعبیر کرنے میں استعمال کیا جاسکتی ہے۔

فرض کرو کہ مسادات عن  $\equiv ( ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰ ) =$  کی

اصولوں عن، عن، عن، عن، عن کا ایک نیم غیر متغیر نہ (پچھلے دفعہ کی تعریف کے بموجب) ہے جس کا رتبہ ۵۵ ہے۔ تب اگر عن، عن، عن، عن کی بجائے

عن، عن، عن، عن، عن



بُذ (عَمْ عَمْ عَمْ ... عَمْ) = فا (بُذْ بُذْ بُذْ ... بُذْ)  
اب اصلوں کو انکے متکافیوں میں بدلنے سے اور اسلئے بُذ کو بُذ میں  
بُذ کو بُذ میں ... بُذ کو بُذ میں ... بدلنے سے (یعنی لا تھو) کی  
انکی متعم قیمتیں دینے سے) ہمیں ماہل ہوتا ہے

بُذ سا (عَمْ عَمْ عَمْ ... عَمْ) = فا (بُذْ بُذْ بُذْ ... بُذْ)  
جہاں سا، اصلوں کا ایک صحیح متشاکل تفاعل ہے اور فا، سروں کی  
رقوم میں متناظر قیمت ہے۔ اس تفاعل کو ہم متغیر کا (جو اس سے اخذ  
کیا گیا ہو) ماخذ\* کہتے ہیں۔

پھر اصلوں عَمْ عَمْ عَمْ ... عَمْ کی بجائے عَمْ - لا عَمْ - لا عَمْ - لا عَمْ - لا  
دیج کر اور اسلئے بُذ وغیرہ کی بجائے عَمْ وغیرہ (دفعہ ۳۵) تو

بُذ سا (عَمْ - لا عَمْ - لا عَمْ ... عَمْ - لا) = فا (عَمْ عَمْ عَمْ ... عَمْ عَمْ عَمْ)  
اس طرح ہم فرقوں کے تفاعل سے آسانی کے ساتھ ہم متغیر اخذ  
کر لیتے ہیں اور ساتھ ہی سروں کی رقوم میں اسکا معادل معلوم کر لیتے ہیں  
طریق عمل کو واضح کر سیکے لئے ہم کبھی کی صورت میں ذیل کی  
مثال لیتے ہیں :-

بُذ ح (ع - ب) = ۱۸ (بُذْ - بُذْ)

(114)

اصلوں کو انکے متکافیوں میں اور بُذ کو بُذ، بُذ کو بُذ، بُذ کو بُذ میں بدلنے سے

\* اس اصطلاح 'ماخذ' (Source) کو ایم۔ رابرٹس نے جاری کیا۔



ہیں کہ چونکہ

اس لئے فہ کی تینوں رقموں میں سے ہر رقم میں ہر اصل کا درجہ ۲ ہے جو یہاں ۲ کے مساوی ہے۔  
اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ چار درجہ کا ایک غیر متغیر یہ بھی ہے۔

$$1. \{ (ج-ع) (ب-ض) - (ع-ب) (ض-ج) \} \{ (ع-ب) (ج-ض) \}$$

$$-(\text{پ-جیم})(\text{ع-ضم}) \} \times \{ (\text{پ-جیم})(\text{ع-ضم}) - (\text{ج-عجم})(\text{پ-ضم}) \}$$

$$= -(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}) \pi \pi \pi =$$

(115) کسی مخصوص صورت میں یہ معلوم کر لینا کوئی مشکل کام نہیں کہ آیا نہ سے ایک غیر متغیر حاصل ہو گا یا ہم متغیر۔ کیونکہ اگر فہ سے ایک غیر متغیر حاصل ہوتا ہے تو  $F = \pm$  مسا یعنی فہ نہیں بدلتا (سوائے علامت میں اور یہ اس وقت جبکہ اسکے نمونہ کی رقم اصلوں کے فرقوں کی ایک طاق تعداد کا حاصل ضرب ہو یعنی جبکہ اسکا وزن طاق ہو) اگر اصلوں کی بجائے انکے متکافی درج کئے جائیں اور سادہ ترین ضرب (عم عم ... عن) سے ضرب دیکر کسریں دور کی جائیں۔ وہ غیر متغیر جسکا وزن طاق ہو معوج غیر متغیر کہلاتا ہے۔

۱۶۸۔ ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے خواص - نہ چونکہ  
اصولوں کا ایک بتجائش تفاعل ہوتا ہے اسلئے اس سے اخذ کردہ  
ہم متغیر کو شکل

$\frac{ع}{لا} \text{ فـ } (\frac{لا}{ع-لا}, \dots, \frac{لا}{ع-لا})$

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں  $\phi$  کا رتبہ  $m$  اور وزن  $n$  ہے۔ نیز  $\phi$  چونکہ فرقوں کا ایک تفاعل ہوتا ہے اسلئے ہم ہر جزو ترکیبی

میں ایک جمع کر سکتے ہیں مثلاً ہم  $\frac{\phi}{\phi - \phi_1}$  میں ایک جمع کر کے  $\frac{\phi}{\phi - \phi_1}$

حاصل کر سکتے ہیں۔ پھر ہر عنصر کو  $\phi$  سے ضرب دینے سے ہم متغیر ہو جاتا ہے

$$\phi = \left( \frac{\phi}{\phi - \phi_1} + \frac{\phi}{\phi - \phi_2} + \dots + \frac{\phi}{\phi - \phi_n} \right)$$

اب  $\phi$ ،  $\phi_1$ ،  $\phi_2$ ، ... کے شکافیوں کے لئے ترقیم

$\phi$ ،  $\phi_1$ ،  $\phi_2$ ، ... استعمال کرو اور فرض کرو کہ  $\phi$  وہ تفاعل ہے

جسکی اصلیں  $\phi$ ،  $\phi_1$ ،  $\phi_2$ ، ...  $\phi$  ہیں یعنی

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n + \dots = 0$$

تو چونکہ

$$\frac{\phi}{\phi - \phi_1} = \frac{1}{\phi - \phi_1}$$

اور  $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n + \dots$  اسلئے ہم متغیر آسانی کے ساتھ اس شکل

(۱)  $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n + \dots$  کے ساتھ اس شکل

$$\phi = \left( \frac{\phi}{\phi - \phi_1} + \frac{\phi}{\phi - \phi_2} + \dots + \frac{\phi}{\phi - \phi_n} + \dots \right)$$

میں تحویل ہو جاتا ہے۔ پس یہ ثابت ہو گیا کہ ہم متغیر نہیں بدلتا جبکہ

$\phi$ ،  $\phi_1$ ،  $\phi_2$ ، ...  $\phi$  کی بجائے ان کے شکافی حرج کئے جاتے ہیں اور نتیجہ کو  $(\phi - \phi_1)$  کہہ سکتے ہیں

سے ضرب دیا جاتا ہے۔ یہ استحالة لڑ کو لن۔ میں بدل دیتا ہے یعنی ہر سر کا لاحقہ اپنے قسم میں بدل جاتا ہے۔  
اب اگر ہم کسی ہم متغیر کو جبکا درجہ م ہے شکل

(ب' ب' ب' ب'....' ب' م) (لا' ا').... (۱)

میں لکھیں تو ب' ب'....' ب' لاکو لن' ب'....' ب' ل' میں بدلنے سے اس ہم متغیر کی دوسری شکل حاصل ہوتی ہے یعنی شکل ذیل۔

(۱-) کہ لا = ۲ کہ (ج' ج' ج'....' ج' م) (لا' ا').... (۱)

یہ شکل چونکہ (۱) جیسے نمونہ کا لا کا ایک صحیح تفاعل ہے اس لئے دونوں شکلوں کا مقابلہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

م = ن = ۲ کہ ب' = (۱-) کہ ج'....' ب' = (۱-) کہ ج'۔

اس طرح ہم متغیر کا درجہ تفاعل ف کے وزن اور رتبہ کی رقوم میں متعین ہو جاتا ہے اور یہ معلوم ہوتا ہے کہ مزدوج سر (یعنی وہ سر جو تفاعل کے ابتدائی اور آخری رقوموں سے متساوی الفصل ہوتے ہیں) حسب ذیل طریقہ پر مربوط ہیں:-

اگر ہم متغیر کا کوئی سر فا (ب' ب'....' ب' لن) ہو تو اسکا

مزدوج (۱-) فا (لن' لن'....' ب' ب') ہے۔

یہ خاصیت ہم متغیروں کے ساتھ مخصوص ہے اور نیم ہم متغیروں میں نہیں پائی جاتی اگرچہ عامل عطف سے دونوں قسم کے تفاعلوں کو



بنانے کا طریقہ ایک ہی ہے جیسا کہ دفعہ آئندہ سے معلوم ہوگا۔  
ہم متغیر کے درجہ کے لئے  $h$  اور  $k$  کی رقوم میں جو جملہ  
اوپر حاصل ہوا ہے اس سے یعنی  $n = 2 - k$  سے حسب ذیل اہم  
نتیجہ اخذ کئے جاسکتے ہیں:-

(۱) اگر  $h$  نہ ایک غیر متغیر ہے تو  $n = 2 - k$   
کیونکہ اس صورت میں  $n$  اور  $m$  ایک ہی تفاعل ہیں اور  
اسلئے ان کے اوزان  $k$  اور  $n$   $h$ ۔ کہ مساوی ہیں۔  
(۲) طاق درجوں کے کثیر رقیوں کے تمام غیر متغیر  
جفت رتبہ کے ہوتے ہیں۔  
کیونکہ اگر  $n$  طاق ہو تو مساوات  $n = 2 - k$  سے ظاہر  
ہے کہ  $h$  جفت ہونا چاہیئے اور کہ  $n$  کا ضعف۔  
(۳) جفت درجوں کے کثیر رقیوں کے تمام ہم متغیر  
جفت درجہ کے ہوتے ہیں۔

(۱)

کیونکہ اس صورت میں  $n = 2 - k$  کہ جفت ہے۔  
(۴) طاق درجوں کے کثیر رقیوں کے ہم متغیر جفت  
یا طاق درجہ کے ہوتے ہیں بموجب اسکے کہ ان کے سروں کا  
رتبہ جفت یا طاق ہو۔

(۵) دو ہم متغیروں کا حاصل ہمیشہ ابتدائی کثیر رقی کے  
سروں میں جفت رتبہ کا ہوتا ہے۔  
کیونکہ مال کا رتبہ ہم متغیروں کے رتبوں اور اوزان کی رقوم میں

حسب ذیل ہے:-

$$m(n-h-k^*) + h(n-h-k^*) \equiv (n-h-k^*-h)(n-h-k^*)$$

۱۶۹۔ عامل عفو کے ذریعہ سے ہم متغیروں کی ساخت

۱۶۴۔ ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ فاعل، مفعول، خبر، حال، ظرف اور جار کے کلموں کا پھیلنا تفردی احصاء کے ذریعہ شکل

$$\text{فبا} + \text{لا عفا فبا} + \frac{\text{لا}}{2 \times 1} \text{ عفا فبا} + \dots + \frac{\text{لا}}{1 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} \text{ عفا فبا} + \dots$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے جہاں فار (ع) ع... (ع) میں لا۔ رکھنے سے فابائل ہوتا ہے یعنی

$\text{فا} = \text{فا}(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}), \dots, (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$

اور 
$$عف = \frac{1}{جف_1} + \frac{1}{جف_2} + \frac{1}{جف_3} + \dots + \frac{1}{جف_n}$$

اس طریقہ سے ہم متغیر بنانے میں ماخذ فاجس سے ہم نے

ابتدا کی ہے عطف کے متواتر اعمال سے بدل جاتا ہے چنانچہ  
ہر عمل وزن کو بقدر ایک کے گھٹا دیتا ہے یہاں تک کہ ہم اصلی  
تفاعل فاراد، ل، ...، ل، ل پر پہنچتے ہیں جس سے ماخذ بنایا گیا تھا۔  
چونکہ یہ فرقوں کا تفاعل ہے اس لئے وہ جملہ جو عطف کے دوبارہ  
عمل سے حاصل ہوتا ہے معدوم ہو جاتا ہے اور ہم متغیر مکمل  
طور پر حاصل ہوتا ہے۔ عطف کے اعمال کے جواب میں متشاكل تفاعل  
مسا پر عطف کے اعمال کا یہ اثر ہوگا کہ ہر قدم پر اصلوں کا درجہ بقدر

ایک کے گھٹ جائیگا اور آخری متشاکل تفاعل میں صرف اصولوں کے فرق شامل ہونگے۔ اس طرح متواتر اعمال سے ایک ہم متغیر کیلئے ہمیں دو جملے ملیں گے، ایک اصولوں کی قوم میں اور دوسرا سرور کی قوم میں۔ یہ ظاہر ہے کہ ہم متغیر کا درجہ م، ان اعمال مف کی تعداد کے مساوی ہوتا ہے جو مسا کو فہ میں تحویل کرنے میں کرنے پڑتے ہیں یعنی ہم متغیر کا درجہ م ابتدائی اور آخری سروں کے اوزان کے فرق کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز چونکہ

(۱)

$$\text{مسا} = (\text{عم عم} \dots \text{عن}) \text{فہ} \left( \frac{1}{\text{عم}} \dots \frac{1}{\text{عن}} \right)$$

اسلئے مسا کا وزن ن م۔ کہ ہے جہاں فہ (عم، عم، ...، عن) کا وزن کہ ہے۔ پس ہم متغیر جس کا صدر سر ا فہ ہے درجہ ن م۔ کہ کا ہے اور یہ وہی قیمت ہے جو پہلے حاصل ہوئی تھی۔ اس طریقہ کی وضاحت کے لئے ہم چند سادہ مثالیں دیتے ہیں۔

### امثلہ

۱۔ کبی

$$۱ \text{ لا}^۲ + ۱ \text{ لا} + ۱ \text{ لا}^۳ + ۱ \text{ لا} = ۰$$

کا (میسوی) بناؤ۔

تفاعل ۵ = ۱ لا - ۱ لا لینے سے دفعہ ۱۶ کے مطابق ہم دیکھتے

ہیں کہ

۱ لا ۳ عم (جہ - جہ) = ۱۸ (۱ لا - ۱ لا) داہنی طرف کے جملہ پر مف کا اور بائیں طرف کے جملہ پر عف کا عمل کرنے سے

$$- ۱ لا ۳ عم (جہ - جہ) = ۱۸ (۱ لا - ۱ لا)$$

اور پھر اسی طرح عمل کرنے سے

اب اس مساوات پر پھر اسی طرح عمل کر نیک نتیجہ یہ ہوگا کہ مساوات کی دونوں طرف کے جملے معدوم ہو جائیں گے۔ پس مطلوبہ ہم متغیر دفعہ ۱۶ء کے مطابق یہ ہے

اسی کے ساتھ لا اور اصلوں کی رقوم میں متناظر جملے لجاتا ہے۔  
۲۔ چار درجی

$$۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ = ۰$$

کا (ہیمسوی) بناؤ۔

وہ ہم متغیر چار درجی کا ہیمسوی کہلاتا ہے جس کا صدر سر  $۱۰۰۰۰۰۰۰$  ہے۔ اس کا درجہ ۴ ہے کیونکہ  $۱۰۰۰۰۰۰۰ = ۱۰^۴$  اور کہ  $۱۰۰۰۰۰۰۰ = ۱۰^۴$  اور اسلئے  $۱۰۰۰۰۰۰۰ = ۱۰^۴$ ۔ سروں کو ان کے متم میں بدلنے سے ہم متغیر کا ماخذ  $۱۰۰۰۰۰۰۰$  ملتا ہے اور ہمیں آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے

$$۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ = ۰$$

$$۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ = ۰$$

(119)

۳۔ کہی کا وہ ہم متغیر بناؤ جس کا صدر سر ہم غیر متغیر گ ہو۔  
گ میں جو سر شامل ہوتے ہیں ان کو ان کے متموں میں بدلنے سے ہمیں ہم متغیر کا ماخذ ملتا ہے

اور عطف کا عمل کرتے سے ہمیں آسانی کے ساتھ ہم متغیر ذیل کی شکل میں حاصل ہوتا ہے:-

$$۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ = ۰$$

اس میں مزدوج سر علامت اور نیز متمم کے باہمی تبادلہ کے لحاظ سے مختلف ہیں اور گ کا وزن طاق ہے۔ طالب علم اس ہم متغیر کو لا اور اصولوں کی رقوم میں گ کی اس قیمت کی مدد سے جو مثال ۱۵ دفعہ ۲۷ میں دی گئی ہے آسانی کے ساتھ بیان کر سکتا ہے۔

۱۷۰۔ مسئلہ ہم متغیر یا نیم متغیر کی اصولوں کے فرقوں کا کوئی تفاعل اصلی مساوات کی اصولوں کے فرقوں کا ایک تفاعل ہوتا ہے فرض کرو کہ ہم متغیر یا نیم ہم متغیر ہے

فہ (لا) = (لا - غم) (لا - غم) ... (لا - غم) (لا - غم)

چونکہ فہ تفاعل ہے لا غم، غم، غم، غم کے فرقوں کا اسلئے

جف فہ - مف فہ =

یعنی فہ (لا) + (لا - غم) (لا - غم) ... (لا - غم) (لا - غم) مف غم =

اب لا کی بجائے ہر اصل غم، غم، غم، غم، ترتیب وار درج کرو تو

فہ (غم) (ا + مف غم) = فہ (غم) (ا + مف غم) = وغیرہ

اسلئے مف غم + ا = مف غم + ا = ... مف غم + ا =

اور اسلئے مف (غم - غم) =

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

صفحات گذشتہ میں بہت سی مثالیں دی گئی ہیں جن میں ہم متغیروں یا نیم ہم متغیروں کی اصولوں کو اصلی مساوات کی اصولوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے اور غالب علم آسانی کے ساتھ اس بات کی تصدیق کر سکتا ہے

(120)

کسی ایسے جملہ پر مف کے عمل کا نتیجہ۔ اسے۔ پچھلی دفعہ کی مثالوں ۱ اور ۳ کے ہم متغیروں کی اصلیں مثال ۲۵ صفحہ ۷۹ اور مثال ۱۳ صفحہ ۱۲۷ جلد اول میں دی گئی ہیں اور ہم متغیروں کی اصلیں مسئلہ ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۴ صفحات ۱۲۵ تا ۱۲۷ جلد اول میں ملینگی۔

اوپر کا ثابت شدہ مسئلہ دو یا زیادہ ہم متغیروں یا ہم متغیروں کی اصلوں کے فرقوں کے کسی تفاعل کے لئے صریحاً درست ہے۔

۱۷۱۔ دو ہرے خطی استحالہ کا استعمال ہم متغیروں کے نظریہ پر

اب تک ہم نے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے نظریہ پر مساداتوں کی اصلوں کے واسطے سے بحث کی ہے۔ اب ہم ایک جداگانہ اور عام طریقہ کا کچھ ذکر کرینگے جسکی مدد سے اس نظریہ کی توسیع ایسے کثیر رقمیوں کیلئے ہو سکتی ہے جو دو سے زیادہ متغیروں میں متجانس ہیں مثلاً وہ کثیر الاقسام جو اس نظریہ کے متعدد اہم ہندسی اطلاقات میں پیش ہوتے ہیں۔ اگرچہ اس مضمون کی اس قدر توسیع کرنا اس کتاب کی حدود کے باہر ہے لیکن ہم مناسب سمجھتے ہیں کہ جو طریقہ ہم نے اختیار کیا ہے اور جس عام طریقہ کا حوالہ دیا ہے ان دونوں کے درمیان جو تعلق ہے اسکو دکھا دیا جائے۔

مسئلہ ۱۔ فرض کرو کہ کوئی کثیر رقمی

عن  $\equiv$  ل (لا - عم ما) (لا - عم ما) .... (لا - عم ما) ابدال

لا = ل لا + م ما، ل = ل لا + م ما

کے ذریعہ مستحیل کیا گیا ہے۔ تب اگر ان دونوں شکلوں

عن اور عن کے جواب میں غیر متغیر اور عن ہوں تو

ع = (لہ مہ - لہ مہ) لہ ع  
اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

ع = لہ مہ - (لہ مہ - لہ مہ) لہ ع

جہاں لہ مہ کی ہر رقم میں ہر اصل قوت میں داخل ہوتی ہے۔ جب لہ ع کے کسی جزو ضربی مثلاً لہ مہ یا کو مستحیل کیا جاتا ہے تو

لہ مہ = (لہ مہ - لہ مہ) لہ ع (لہ مہ - لہ مہ) لہ ع = لہ مہ - لہ مہ

اس لئے

ع = لہ مہ - (لہ مہ - لہ مہ) لہ ع (لہ مہ - لہ مہ) لہ ع = لہ مہ - لہ مہ  
جہاں لہ مہ کی کسی دو اصلوں کے فرق کیلئے

ع = لہ مہ - (لہ مہ - لہ مہ) لہ ع (لہ مہ - لہ مہ) لہ ع = لہ مہ - لہ مہ

اب لہ مہ کی بجائے اور ع میں جو اصلوں کے فرق داخل ہوتے

ہیں ان سب کی بجائے اندراجات عمل میں لائے جائیں تو کہ وہ ان کے نسبتاً جو استحالہ کی وجہ سے داخل ہوتے ہیں علیحدہ ہو جاتے ہیں اور بالآخر ہمیں حاصل ہوتا ہے

ع = (لہ مہ - لہ مہ) لہ ع

مسئلہ ۲ - اگر کثیر رقمی ع کا ایک ہم متغیر

نہ (لا، ما) ہو تو خطی استحالہ کے بعد نہ کی نئی قیمت (لہ مہ - لہ مہ) لہ ع (لا، ما)

ہوگی۔

اسکا ثبوت گذشتہ مسئلہ کے ثبوت کے مشابہ ہے۔ فرض کر دو کہ  
 فہ (لا' ما) =  $\frac{1}{2}$  (عم - عم) (عم - عم) ... (لا - عم ما) (لا - عم ما) ...  
 جہاں ہر اصل قوت عہ میں داخل ہوتی ہے۔  
 اب پچھلے مسئلہ کی طرح فہ (لا' ما) کی اس قیمت کو مستحیل کر دو چونکہ  
 نسب نمایاں اجزائے ضربی لہ - لہ عم، لہ - لہ عم، ... سب کے سب  
 ایک ہی درجہ عہ میں داخل ہوتے ہیں اسلئے وہ سب ضارب لہ سے  
 ضرب دینے پر غلطی ہو جاتے ہیں اور فہ (لا' ما) کی استحالة شدہ قیمت حاصل  
 ہوتی ہے

(لہ مہ - لہ مہ) فہ (لا' ما)  
 مقطع لہ مہ - لہ مہ کو جسکے عناصر وہ سر ہیں جو دو ہرے خطی استحالة  
 میں داخل ہوتے ہیں استحالة کا مقياس کہتے ہیں۔  
 مساوات عہ = کی اصلوں کے حوالہ کے بغیر ہم یہ فرض کر سکتے  
 ہیں کہ شکل

عہ =  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots$  اور ما کا استحالة عمل میں لایا گیا ہے۔

اوپر کے مسئلے جو ان غیر تغیروں اور ہم تغیروں کے لحاظ سے  
 ثابت کئے گئے ہیں جو اصلوں کے تفاعل میں اسوقت بھی درست رہینگے  
 جب ان تفاعلوں کو سروں کی قوم میں انکی معادل اشکال میں بیان کیا جائے  
 اسلئے ہم ان مسئلوں کو شکل ذیل میں بھی بیان کر سکتے ہیں:-

مسئلہ ۱۔ غیر تغیر کثیر رقمی کے سروں کا ایک ایسا تفاعل  
 ہے کہ جب تغیروں کے خطی استحالة سے کثیر رقمی کو مستحیل کیا جاتا ہے تو



نئے سروں کا وہی تفاعل، ابتدائی تفاعل اور استحالہ کے مقیاس کی ایک قوت کے حامل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔  
مسئلہ ۲۔ ہم متغیر، کثیر رقمی کے سروں کا اور نیز متغیروں کا ایک ایسا تفاعل ہے کہ جب خطی استحالہ سے کثیر رقمی کو مستحیل کیا جاتا ہے تو نئے متغیروں اور سروں کا وہی تفاعل، ابتدائی تفاعل اور استحالہ کے مقیاس کی ایک قوت کے حامل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

اوپر کے مسئلوں میں جو تعریضیں دی گئی ہیں ان کا اطلاق صرفاً ان کثیر رقمیوں پر بھی ہو سکتا ہے جو کئی متغیروں میں متجانس ہوں اور اس لئے یہ تعریضیں ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے اس وسیع تر نظریہ کی بنیاد قرار پاتی ہیں جس کا حوالہ دیا جا چکا ہے۔ مثال ذیل میں ایک مثال دی گئی ہے جس میں تین متغیروں والے کثیر رقمی کے لئے غیر متغیر حاصل کیا گیا ہے۔

## مثالیں

۱۔ خطی استحالہ

$$لا = لا + ما = لا + لا + ما$$

سے اگر

$$لا + لا + ما + ج = لا + لا + ج + ما$$

تو ثابت کرو کہ

$$لا + ج = لا + ما = لا + لا + ج + ما$$



ی = ل + لا + م + ما + نہ سے  
سے تین متغیروں کا متجانس دو درجی تفاعل  
۱ لا + ب + نا + ج ی + ۲ ف + ی + گ ی + ۳ ہ لا  
ذیل کے تفاعل

۱ لا + ب + ما + ج ی + ۲ ف + ما + ی + گ ی + ۳ ہ لا  
میں تحول ہو جائے تو ثابت کر دو کہ

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}$$

جہاں مقطع (ل، م، نہ) استعمال کا مقياس ہے۔  
استعمال کے مقياس کو شکل

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}$$

میں لکھو اور اصلی سروں کے جوڑہ مقطع کو استعمال کے اس مقياس سے  
علی الترتیب دو مرتبہ ضرب دو۔ حاصل ہوئیوے مقطع کے عناصر اور  
لا، ما، ف وغیرہ کے جھینڈے ہوئے سروں میں مقابلہ کرنا مظاہرہ نتیجہ  
کی تصدیق ہو جاتی ہے۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ وہ مقطع جیسے جہاں بحث کی گئی ہے تین متغیروں  
کے دوئے تفاعل کا ایک غیر متغیر ہے۔

۱۷۲۔ خطی استعمال سے اخذ شدہ ہم متغیروں کے خواص۔

اب ہم دفعہ ۱۷۱ کے مسئلہ ۲ کی دوسری شکل کو ہم متغیر کی تعریف کے  
غور پر لے کر یہ بتائینگے کہ سروں کو معلوم کرنے کا وہ قانون جو دفعہ ۱۶۹ میں









کثیر رقمیوں کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی نوعیت کو اور جن دو طریقوں سے ان دو تفاعلوں پر بحث کی جا سکتی ہے ان کا درمیانی تعلق سمجھا دینے کے بعد اب ہم چند مسئلے ثابت کرینگے جو کثیر رقمیوں کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی ساخت میں (جب کثیر رقمیوں کو خطی ابدال کے ذریعہ مستحیل کیا جاتا ہے) کثرت سے استعمال ہوتے ہیں۔ وہ طلباء جو اس مضمون کا مطالعہ پہلی مرتبہ کر رہے ہوں اسکو یہیں چھوڑ کر اگلا باب پڑھ سکتے ہیں جس میں دو درجی، تین درجی، چار درجی کی صورتوں میں وہ اصول استعمال ہوئے ہیں جنکی صراحت کجا چچی ہے۔

۳۔۱۔ مسئلہ ۱۔ فرض کرو کہ  $n$  ویں درجہ کا کوئی تینجاس کثیر رقمی  $f$  (لا، ما) استحالہ

$$لا = لا + مہ ما، ما = لا + مہ ما$$

سے فا (لا، ما) ہو جاتا ہے اور نیز فرض کرو کہ لا، ما کا کوئی اور تفاعل  $e$  اسی استحالہ سے  $e$  ہو جاتا ہے تو

$$مف = \left( \frac{جف}{جف لا} - \frac{جف ما}{جف لا} \right) = فا \left( \frac{جف ما}{جف لا} - \frac{جف ما}{جف لا} \right) \quad (۱)$$

جہاں  $m$  استحالہ کا مقیاس ہے۔  
ثبوت ۱۔ مساداتوں

$$لا = لا + مہ ما، ما = لا + مہ ما$$

کو عمل کرنے سے

$$ملا = مہ لا - مہ ما، مہ ما = مہ لا + لا$$

$$اسلئے \quad م \frac{جف لا}{جف لا} = مہ \frac{جف لا}{جف لا} - مہ \frac{جف ما}{جف لا} = مہ \frac{جف ما}{جف لا} - مہ \frac{جف ما}{جف لا}$$



لیکن

$$\frac{\text{جفاء} \times \text{جفاء} \times \text{جف لا} + \text{جف لا} \times \text{جف لا} \times \text{جف ما}}{\text{جف لا} \times \text{جف لا} \times \text{جف لا}}$$

$$= \frac{1}{\text{م}} \left( \text{م} \times \frac{\text{جفاء}}{\text{جف لا}} - \text{لا} \times \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} \right)$$

$$\frac{\text{جفاء} \times \text{جفاء} \times \text{جف لا} + \text{جف لا} \times \text{جف لا} \times \text{جف ما}}{\text{جف ما} \times \text{جف لا} \times \text{جف لا}}$$

$$= \frac{1}{\text{م}} \left( \text{م} \times \frac{\text{جفاء}}{\text{جف لا}} + \text{لا} \times \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} \right)$$

ان مساواتوں کو اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{جفاء}}{\text{جف ما}} = \text{لا} \left( \frac{1}{\text{م}} \times \frac{\text{جفاء}}{\text{جف ما}} \right) + \text{م} \left( \frac{1}{\text{م}} \times \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} \right)$$

$$\frac{\text{جفاء}}{\text{جف لا}} = \text{لا} \left( \frac{1}{\text{م}} \times \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} \right) + \text{م} \left( \frac{1}{\text{م}} \times \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} \right)$$

اور چونکہ

$$\text{ف} (\text{لا} + \text{م} \times \text{ما}) = \text{لا} + \text{م} \times \text{ما} = \text{فا} (\text{لا} + \text{ما})$$

اس لئے کہ اور ما کو علی الترتیب  $\frac{1}{\text{م}} \times \frac{\text{جفاء}}{\text{جف ما}}$  اور  $\frac{1}{\text{م}} \times \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}}$  میں

بدلتے سے مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

اکل میں طرح لا اور ما کو

$$\frac{1}{\text{م}} \times \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} - \frac{1}{\text{م}} \times \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$$

میں بدلتے سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\text{م} \times \text{ف} \left( \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} \right) = \text{فا} \left( \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} \right) \quad (۲)$$

نتائج (۱) اور (۲) کو ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے بنانے میں استعمال کیا جاسکتا ہے جیسا کہ اب ہم بیان کریں گے۔  
فرض کرو کہ ف (لا، ما) اور ع کسی تیسرے کثیر رقمی و کے ہم متغیر ہیں چاروں مخصوص صورت کے طور پر ان میں سے کسی ایک کے ساتھ متماثل ہو سکتا ہے۔ خطی استحالہ کے ذریعہ کثیر رقمی و کو تحویل کرو اور فرض کرو کہ و کے نئے سروں اور لا، ما کی رقوم میں بیان شدہ وہی ہم متغیر فاج (لا، ما) اور ع سے تعبیر ہوتے ہیں۔ تب دفعہ ۱ مسئلہ ۲ کی رو سے

$$مَ فَا (لا، ما) = فاج (لا، ما)$$

$$مَ ع = ع ع$$

اور

پس ان مساواتوں سے (۱) میں اندراج کرنے سے

(128)

$$مَ ف (جف ع - جف لا) = فاج (جف ع - جف لا)$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ ف (جف ع - جف لا) - جف ع

و کا ایک ہم متغیر ہے۔

اور اسی طرح (۲) سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ

$$ف (جف ع - جف لا) ع$$

سے و کا ایک غیر متغیر یا ہم متغیر حاصل ہوتا ہے بموجب اسکے کہ

ع، ن ویں یا اس سے اعلیٰ رتبہ کا ہو۔

غیر متغیروں اور ہم متغیروں کو اس طریقہ سے بنانے کی چند مثالیں



کی قیمت معلوم کرو جہاں  $e = (a'p'j'c'w)(la'a)$

= (عفب، عفب، عفب، ... عفب) (لا، ما، ن)  
 میں لکھنے سے غیر متغیر کی تعریف کی رو سے ہمیں حاصل ہوتا ہے  
 ف (عفب، عفب، عفب، ...) = ف (عفب، عفب، عفب، ... عفب)  
 جس سے یہ ثابت ہے کہ ف (عفب، عفب، عفب، ... عفب) ایک  
 غیر متغیر یا ہم متغیر ہے۔

جب اس طرح لا، ما اور لا، ما کو تحلیل کیا جاتا ہے جس طرح  
 اس مسئلہ میں کیا گیا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ یہ متغیر ہم استحالیہ  
 متغیر ہیں۔ اور عام صورت میں متغیروں کی کسی تعداد کے لئے جبکہ  
 وہ سر جو ایک جٹ کے استحالیہ میں داخل ہوتے ہیں وہی ہوں جو دوسرے  
 جٹ کے استحالیہ میں داخل ہوتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ یہ دونوں جٹ ہم استحالیہ ہیں۔  
 وہ تفاعل جو مساوات (۱) میں واقع ہوتے ہیں مستخرجہ ہیں۔  
 کہلاتے ہیں۔ اس مساوات کی بائیں جانب کا جملہ عکان وال مستخرجہ ہے۔

## مثالیں

۱۔ فرض کرو کہ دو درجی

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۱ \text{ ما} + ۱ \text{ ما}$$

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۱ \text{ ما} + ۱ \text{ ما}$$

بدل کر ہو جاتا ہے تو مثال اذ ذہن کے مطابق

$$۱ \text{ لا} - ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ما} - (۱ \text{ لا} - ۱ \text{ لا})$$

$$\begin{array}{c} \text{اب چونکہ} \\ \text{لا} \text{ جف} + \text{لا} \text{ ما} + \text{ما} \text{ جف} + \text{ما} \text{ جف} \\ \text{جف لا} + \text{جف لا جف ما} + \text{جف ما} \end{array}$$

$$= \frac{لا^۲ جف^۲}{جف^۲ لا} + \frac{لا^۲ ما^۲ جف^۲}{جف^۲ لا جف^۲ ما} + \frac{ما^۲ جف^۲}{جف^۲ ما}$$

اسلئے اس آخری نتیجہ میں لا، ما اور لا، ما کو متغیر سمجھنے سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{جف^۲ ع^۲}{جف^۲ لا جف^۲ ما} - \left( \frac{جف^۲ ع^۲}{جف^۲ لا جف^۲ ما} \right)$$

$$= \left\{ \frac{جف^۲ ع^۲}{جف^۲ لا} - \frac{جف^۲ ع^۲}{جف^۲ ما} \right\} \left( \frac{جف^۲ ع^۲}{جف^۲ لا جف^۲ ما} \right)$$

اس سے دو درجی کا ایک غیر متغیر اور کسی اعلیٰ کثیر رقمی کا ایک ہم متغیر (جس کو ہلیسوی کہتے ہیں) حاصل ہوتا ہے۔

۲۔ اگر ع، تفاعلوں

(ا، ب، ج، د) (لا، ما) اور (ا، ب، ج، د، س) (لا، ما)

کو تعبیر کرے تو پچھلی مثال کے عمل سے کوئی ہم متغیر اخذ ہوتے ہیں۔  
(دیکھو مثلاً ۲، دفعہ ۱۶۹)۔

جواب :- (۱) (ا، ج - ب، لا، د - ب، ج، لا، ما + (ب، ج، لا، ما)

(۲) (ا، ج - ب، لا، د - ب، ج، لا، ما

+ (ا، س + ب، د - ج، لا، ما)

+ (ا، ب - ج، د، لا، ما + (ج، س - د، لا، ما)

۱۷۵۔ مسئلہ ۳۔ اگر لا، ما کے کثیر رقمی کا کوئی غیر متغیر

ع + ک (لا، ما - لا، ما)

بنایا جائے تو ک کی مختلف قوتوں کے سر جنبہ متغیروں لا، ما کے

متجانس تفاعلوں کے طور پر سمجھا گیا ہو ع کے ہم متغیر ہوتے ہیں۔

ء کو خطی استحالہ کے ذریعہ تبدیل کرو اور فرض کرو

(ب'، ب'، ب'، ...، ب') (لا، ما) = (ب'، ب'، ب'، ...، ب') (لا، ما)

نیز اگر لا، ما اور لا، ما ہم استحالہ متغیر ہوں تو

لا، ما - لا، ما = م (لا، ما - لا، ما)

اسلئے (ب'، ب'، ب'، ...، ب') (لا، ما) + ک (لا، ما - لا، ما)

کو تبدیل کرنے سے یہ ہو جاتا ہے

(ب'، ب'، ب'، ...، ب') (لا، ما) + ک م (لا، ما - لا، ما)

اور ان دونوں شکلوں کا کوئی غیر متغیر نہ بنانے سے ہمیں مل جاتا ہے

(فہ، فہ، فہ، ...، فہ) (ا، ک)

= م (فا، فا، فا، ...، فا) (ا، م)

جس سے ثابت ہوتا ہے کہ

فر = م فار

فر ہم متغیر ہے۔

یعنی

جب (لا، ما - لا، ما) کی بجائے (ب'، ب'، ب'، ...، ب') (لا، ما)

کو رکھا جاتا ہے تو ہمیں ذیل کا مسئلہ ملتا ہے جسکو اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے

اگر (ب'، ب'، ب'، ...، ب') (لا، ما) کا ایک غیر متغیر

فہ (ب'، ب'، ب'، ...، ب') ہو تو

فہ (ب'، ب'، ب'، ...، ب') + ک ب' (ب'، ب'، ب'، ...، ب') + ک ب' (ب'، ب'، ب'، ...، ب')









ع میں لا اور ما کی بجائے لاز اور مار درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے  
اگر اس عمل کی تکمیل کے بعد لا اور ما غائب ہو جائیں تو ہمیں ایک  
غیر متغیر حاصل ہوتا ہے اور اس صورت میں یہ دیکھنا آسان ہے کہ مساویہ  
۱، ۲، ۳، ...، ف، ق سب کو ایسی رقموں میں جیسی کہ (خ، ز) ہے  
ٹھیک ان مرتبہ واقع ہونا چاہئے۔ مثلاً مضابطہ

(۲، ۱) ۱، ۲، ۳، ...، ف، ق  
سے تمام ہفت کثیر رقموں کے لئے نشانہائی غیر متغیروں کا ایک سلسلہ  
حاصل ہوتا ہے اور بالعموم غیر متغیر کا مرتبہ اجزائے ضربی ۱، ۲، ۳، ... وغیرہ  
کی تعداد کے مساوی ہوتا ہے۔ اسی طرح مضابطہ

(۲، ۱) (۳، ۲) (۱، ۳) ۱، ۲، ۳، ...  
سے ہم درجہ ۲ م کے کثیر رقموں کے لئے نشانہائی غیر متغیروں کا ایک سلسلہ  
اخذ کر سکتے ہیں۔ چار درجہ کی صورت میں عمل (۲، ۱) (۳، ۲) (۱، ۳)  
سے غیر متغیر

$$۱، ۲، ۳ + ۱، ۲، ۳، ۴ - ۱، ۲، ۳ - ۱، ۲ - ۱$$

حاصل ہوتا ہے۔  
یہ دیکھ لیا جاسکتا ہے کہ متغیروں کا یہ باہمی تبادلہ ایک تفرقی عامل  
کے ذریعہ سے پورا کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً

(لا، جف لاز + ما، جف لاز) ۱، ۲، ۳، ...، ف، ق  
غیر متغیروں کو بنانے کا مصرعہ بالا طریقہ پر فہم کیلئے سے منسوب ہے۔  
غیر متغیروں اور ہم متغیروں کو محسوب کرنا مندرجہ بالا طریقہ  
آسانی کے ساتھ نشانہائی اشکال پر جاری کیا جاسکتا ہے۔ کیونکہ اگر  
لا، م، ی، لا، م، ی، لا، م، ی، ہم استعمال متغیر ہوں تو مقطعات کو ضرور





(ا ب) = (ا ب ب - ا ب ب) سے بد لجاتی ہے۔  
اس طرح 'مثلاً' چار درجہ کے غیر متغیر 'آرہولڈ کی ترقیم میں'  
یوں لکھے جاتے ہیں:-

$$۲ = (ا ب) = (ا ب ب) = (ا ب ج) = (ا ب ج ا) = (ا ب ا)$$

اور ہم متغیر جنکے صدر سرھ اور گ ہیں یوں لکھے جاتے ہیں:-

$$۲ = (ا ب) = (ا ب ب) = (ا ب گ) = (ا ب ج ا) = (ا ب ا ج)$$

ان جہوں کی تصدیق (ا ب) وغیرہ کی بجائے (ا ب ب - ا ب ب) وغیرہ  
رکھنے اور پھر پھیلائے اور عب کے سر داخل کرنے سے ہو سکتی ہے۔  
یہ عمل کیا جاسکتا ہے کیونکہ یہ جملہ حرفوں (ا ب ب - ا ب ب) کے ہر جوڑے میں  
چوتھے درجہ کے متجانس تفاعل ہیں۔ یہ طریقہ کیلی کے طریقہ کی طرح  
اس کثیر رقمی پر براستعمال کیا جاسکتا ہے جو متغیروں کی کسی تعداد پر  
مشتمل ہو۔

86)

اب ہم اس باب کو چند مثالوں کے ساتھ جو مصرعہ صدر نظریہ  
کو واضح کر چکے ہیں منتخب کیا ہیں ختم کرتے ہیں۔ مزید معلومات کیلئے  
طالب علم کو حسب ذیل کتابوں کا حوالہ دیا جاتا ہے:-

Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra

Vorlesungen über Invariantentheorie

Theorie der binären algebraischen Formen

اس آخری کتاب میں علامتی طریقہ شروع سے آخر تک اختیار کیا گیا ہے۔

## مثالیں

- ۱۔ کسی کثیر رقمی کا میز ایک غیر متغیر ہوتا ہے۔
- ۲۔ دو کثیر رقمیوں کا حاصل اسقاط اس نظام کا ایک غیر متغیر ہوتا ہے۔

۳۔ دفعہ ۱۶۶ کی تعریفوں سے ثابت کر دو کہ کثیر رقمی  $\epsilon$  (لا-ما - لا-ما) کے تمام غیر متغیر  $\epsilon$  کے ہم متغیر ہیں جہاں متغیر لا: کا ہے۔  
اسکے ذریعہ سے کبھی کے ہم متغیر چار درجہ کے غیر متغیروں سے جو اصلوں کی رقوم میں بیان کئے گئے ہوں اخذ کرو۔

۴۔ اگر کثیر رقمیوں

$$\frac{f_1(\lambda)}{\lambda - \epsilon_1}, \frac{f_2(\lambda)}{\lambda - \epsilon_2}, \dots, \frac{f_n(\lambda)}{\lambda - \epsilon_n}$$

میں سے ہر ایک کیلئے  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  رتبہ  $\epsilon$  کا وہی غیر متغیر ہو جہاں  
 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  مسادات  $f_i(\lambda) = 0$  کی اصلیں ہیں تو ثابت کر دو کہ  
 $f(\lambda)$  کا ایک ہم متغیر

$$\frac{f(\lambda)}{\lambda - \epsilon}$$

۵۔ مثلاً اگر  $\epsilon$  سے اس غیر متغیر  $\epsilon$  کی تعبیر کی جائے جو چار اصلوں  
 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$  سے ترکیب پایا ہے (دیکھو دفعہ ۱۶۷) اور اسی طرح  
کی قیمتیں  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$  کے لئے استعمال کی جائیں تو ہمیں پانچ  
درجہ کا حسب ذیل ہم متغیر ملتا ہے۔

$$\epsilon_1(\lambda - \epsilon_1) + \epsilon_2(\lambda - \epsilon_2) + \epsilon_3(\lambda - \epsilon_3) + \epsilon_4(\lambda - \epsilon_4) + \epsilon_5(\lambda - \epsilon_5)$$

۵۔ مسادات

$$\epsilon_1(\lambda - \epsilon_1) + \epsilon_2(\lambda - \epsilon_2) + \epsilon_3(\lambda - \epsilon_3) + \epsilon_4(\lambda - \epsilon_4) + \epsilon_5(\lambda - \epsilon_5) = 0$$

کی اصلیں  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5$  ہیں اور

$$\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5 = f(\lambda)$$





$$\begin{aligned} & ({}^1_1 \text{ع} - {}^1_2 \text{ع}) + ({}^2_3 \text{ع} - {}^2_4 \text{ع}) + ({}^3_5 \text{ع} - {}^3_6 \text{ع}) \\ & + ({}^4_7 \text{ع} - {}^4_8 \text{ع}) + ({}^5_9 \text{ع} - {}^5_{10} \text{ع}) + ({}^6_{11} \text{ع} - {}^6_{12} \text{ع}) \\ & + ({}^7_{13} \text{ع} - {}^7_{14} \text{ع}) + ({}^8_{15} \text{ع} - {}^8_{16} \text{ع}) + ({}^9_{17} \text{ع} - {}^9_{18} \text{ع}) + ({}^{10}_{19} \text{ع} - {}^{10}_{20} \text{ع}) \\ & + ({}^{11}_{21} \text{ع} - {}^{11}_{22} \text{ع}) + ({}^{12}_{23} \text{ع} - {}^{12}_{24} \text{ع}) + ({}^{13}_{25} \text{ع} - {}^{13}_{26} \text{ع}) + ({}^{14}_{27} \text{ع} - {}^{14}_{28} \text{ع}) \\ & + ({}^{15}_{29} \text{ع} - {}^{15}_{30} \text{ع}) + ({}^{16}_{31} \text{ع} - {}^{16}_{32} \text{ع}) + ({}^{17}_{33} \text{ع} - {}^{17}_{34} \text{ع}) + ({}^{18}_{35} \text{ع} - {}^{18}_{36} \text{ع}) \\ & + ({}^{19}_{37} \text{ع} - {}^{19}_{38} \text{ع}) + ({}^{20}_{39} \text{ع} - {}^{20}_{40} \text{ع}) + ({}^{21}_{41} \text{ع} - {}^{21}_{42} \text{ع}) + ({}^{22}_{43} \text{ع} - {}^{22}_{44} \text{ع}) \\ & + ({}^{23}_{45} \text{ع} - {}^{23}_{46} \text{ع}) + ({}^{24}_{47} \text{ع} - {}^{24}_{48} \text{ع}) + ({}^{25}_{49} \text{ع} - {}^{25}_{50} \text{ع}) + ({}^{26}_{51} \text{ع} - {}^{26}_{52} \text{ع}) \\ & + ({}^{27}_{53} \text{ع} - {}^{27}_{54} \text{ع}) + ({}^{28}_{55} \text{ع} - {}^{28}_{56} \text{ع}) + ({}^{29}_{57} \text{ع} - {}^{29}_{58} \text{ع}) + ({}^{30}_{59} \text{ع} - {}^{30}_{60} \text{ع}) \\ & + ({}^{31}_{61} \text{ع} - {}^{31}_{62} \text{ع}) + ({}^{32}_{63} \text{ع} - {}^{32}_{64} \text{ع}) + ({}^{33}_{65} \text{ع} - {}^{33}_{66} \text{ع}) + ({}^{34}_{67} \text{ع} - {}^{34}_{68} \text{ع}) \\ & + ({}^{35}_{69} \text{ع} - {}^{35}_{70} \text{ع}) + ({}^{36}_{71} \text{ع} - {}^{36}_{72} \text{ع}) + ({}^{37}_{73} \text{ع} - {}^{37}_{74} \text{ع}) + ({}^{38}_{75} \text{ع} - {}^{38}_{76} \text{ع}) \\ & + ({}^{39}_{77} \text{ع} - {}^{39}_{78} \text{ع}) + ({}^{40}_{79} \text{ع} - {}^{40}_{80} \text{ع}) + ({}^{41}_{81} \text{ع} - {}^{41}_{82} \text{ع}) + ({}^{42}_{83} \text{ع} - {}^{42}_{84} \text{ع}) \\ & + ({}^{43}_{85} \text{ع} - {}^{43}_{86} \text{ع}) + ({}^{44}_{87} \text{ع} - {}^{44}_{88} \text{ع}) + ({}^{45}_{89} \text{ع} - {}^{45}_{90} \text{ع}) + ({}^{46}_{91} \text{ع} - {}^{46}_{92} \text{ع}) \\ & + ({}^{47}_{93} \text{ع} - {}^{47}_{94} \text{ع}) + ({}^{48}_{95} \text{ع} - {}^{48}_{96} \text{ع}) + ({}^{49}_{97} \text{ع} - {}^{49}_{98} \text{ع}) + ({}^{50}_{99} \text{ع} - {}^{50}_{100} \text{ع}) \end{aligned}$$

اب دو صورتیں قابل توجہ ہیں :-

(۱) جب تینوں دو درجہ باہم موسیقی ہوتے ہیں۔ اس صورت میں  $\text{ع} = {}^1_{13} \text{ع} = {}^1_{13} \text{ع}$  اور متماثلہ مساوات شکل ذیل اختیار کرتی ہے :-

$$= \left( \frac{{}^1_{13} \text{ط}}{\text{ع}} \right) + \left( \frac{{}^2_{13} \text{و}}{\text{ع}} \right) + \left( \frac{{}^3_{13} \text{ع}}{\text{ع}} \right)$$

(۲) جب ایک دو درجہ ما = سے اُن نقطوں کے درجہ کے ایک متعین ہوتے ہیں جو دوسرے دو ع = اور د = سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس صورت میں  $\text{ع} = {}^1_{31} \text{ع}$  اور  $\text{ع} = {}^1_{32} \text{ع}$  اور عا مساوات (۱) میں یہ درجہ کرنے سے نہیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} & ({}^1_1 \text{ع} - {}^1_2 \text{ع}) + ({}^2_3 \text{ع} - {}^2_4 \text{ع}) + ({}^3_5 \text{ع} - {}^3_6 \text{ع}) + ({}^4_7 \text{ع} - {}^4_8 \text{ع}) \\ & + ({}^5_9 \text{ع} - {}^5_{10} \text{ع}) + ({}^6_{11} \text{ع} - {}^6_{12} \text{ع}) + ({}^7_{13} \text{ع} - {}^7_{14} \text{ع}) + ({}^8_{15} \text{ع} - {}^8_{16} \text{ع}) \\ & + ({}^9_{17} \text{ع} - {}^9_{18} \text{ع}) + ({}^{10}_{19} \text{ع} - {}^{10}_{20} \text{ع}) + ({}^{11}_{21} \text{ع} - {}^{11}_{22} \text{ع}) + ({}^{12}_{23} \text{ع} - {}^{12}_{24} \text{ع}) \\ & + ({}^{13}_{25} \text{ع} - {}^{13}_{26} \text{ع}) + ({}^{14}_{27} \text{ع} - {}^{14}_{28} \text{ع}) + ({}^{15}_{29} \text{ع} - {}^{15}_{30} \text{ع}) + ({}^{16}_{31} \text{ع} - {}^{16}_{32} \text{ع}) \\ & + ({}^{17}_{33} \text{ع} - {}^{17}_{34} \text{ع}) + ({}^{18}_{35} \text{ع} - {}^{18}_{36} \text{ع}) + ({}^{19}_{37} \text{ع} - {}^{19}_{38} \text{ع}) + ({}^{20}_{39} \text{ع} - {}^{20}_{40} \text{ع}) \\ & + ({}^{21}_{41} \text{ع} - {}^{21}_{42} \text{ع}) + ({}^{22}_{43} \text{ع} - {}^{22}_{44} \text{ع}) + ({}^{23}_{45} \text{ع} - {}^{23}_{46} \text{ع}) + ({}^{24}_{47} \text{ع} - {}^{24}_{48} \text{ع}) \\ & + ({}^{25}_{49} \text{ع} - {}^{25}_{50} \text{ع}) + ({}^{26}_{51} \text{ع} - {}^{26}_{52} \text{ع}) + ({}^{27}_{53} \text{ع} - {}^{27}_{54} \text{ع}) + ({}^{28}_{55} \text{ع} - {}^{28}_{56} \text{ع}) \\ & + ({}^{29}_{57} \text{ع} - {}^{29}_{58} \text{ع}) + ({}^{30}_{59} \text{ع} - {}^{30}_{60} \text{ع}) + ({}^{31}_{61} \text{ع} - {}^{31}_{62} \text{ع}) + ({}^{32}_{63} \text{ع} - {}^{32}_{64} \text{ع}) \\ & + ({}^{33}_{65} \text{ع} - {}^{33}_{66} \text{ع}) + ({}^{34}_{67} \text{ع} - {}^{34}_{68} \text{ع}) + ({}^{35}_{69} \text{ع} - {}^{35}_{70} \text{ع}) + ({}^{36}_{71} \text{ع} - {}^{36}_{72} \text{ع}) \\ & + ({}^{37}_{73} \text{ع} - {}^{37}_{74} \text{ع}) + ({}^{38}_{75} \text{ع} - {}^{38}_{76} \text{ع}) + ({}^{39}_{77} \text{ع} - {}^{39}_{78} \text{ع}) + ({}^{40}_{79} \text{ع} - {}^{40}_{80} \text{ع}) \\ & + ({}^{41}_{81} \text{ع} - {}^{41}_{82} \text{ع}) + ({}^{42}_{83} \text{ع} - {}^{42}_{84} \text{ع}) + ({}^{43}_{85} \text{ع} - {}^{43}_{86} \text{ع}) + ({}^{44}_{87} \text{ع} - {}^{44}_{88} \text{ع}) \\ & + ({}^{45}_{89} \text{ع} - {}^{45}_{90} \text{ع}) + ({}^{46}_{91} \text{ع} - {}^{46}_{92} \text{ع}) + ({}^{47}_{93} \text{ع} - {}^{47}_{94} \text{ع}) + ({}^{48}_{95} \text{ع} - {}^{48}_{96} \text{ع}) \\ & + ({}^{49}_{97} \text{ع} - {}^{49}_{98} \text{ع}) + ({}^{50}_{99} \text{ع} - {}^{50}_{100} \text{ع}) \end{aligned}$$

$$\text{ک} = \text{ک} ({}^1_1 \text{ب}) - {}^2_2 \text{بیم} = \text{ک} ({}^1_1 \text{ج}) - {}^1_1 \text{ج} = \text{ک} ({}^1_1 \text{ب ج})$$

اسے

$$۴ (۱^۱ ج - ۲^۱ ب) = ک^۱ \{ ۳ (۱^۱ ب) (۲^۱ ج) - (۳^۱ ج) (۲^۱ ب) \}$$

$$۳ (۱^۱ ج - ۲^۱ ب) = ک^۱ \{ ۳ (۱^۱ ج) - ۳ (۲^۱ ب) \}$$

یا اور تحویل کرنے سے، جبکہ  $۱^۱ ک = ۱^۱ ا یا ۲^۱ ب = ۲^۱ ج (ع' و)$  تو

$$\{ ۳ (ع' و) \} = ۱^۱ ک - ۲^۱ ج = ۲^۱ ج - ۳^۱ ج + ۳^۱ ج = ۳^۱ ج$$

(۷) ثابت کرو کہ چار درجی کا ایک ہم متغیر  $\nabla \begin{pmatrix} ۱^۱ ج \\ ۲^۱ ب \\ ۳^۱ ج \\ ۴^۱ ج \end{pmatrix}$  ہے جہاں  $۱^۱ ج$ ،  $۲^۱ ب$ ،  $۳^۱ ج$ ،  $۴^۱ ج$  کے درج دار فرقوں کے حاصل ضرب کو  $\nabla (۱^۱ ج - ۲^۱ ب)$  سے تعبیر کیا گیا ہے۔

(138)

(۸) ثابت کرو کہ وہ شرط کہ  $n$  ویں درجہ کی مساوات کی چار اصلیں ایک خط مستقیم پر نقطوں کا ایک موسیقی نظام متعین کریں  $\frac{1}{n} (n-1) \times (n-2) (n-3)$  ویں درجہ کے ایک غیر متغیر کو صفر کے مساوی رکھ کر بیان کی جا سکتی ہے۔

(۹) اگر کثیر رقمی  $(۱^۱ ج، ۲^۱ ب، ۳^۱ ج، ۴^۱ ج)$  کا کوئی نیم غیبہ متغیر

فہ  $(۱^۱ ج، ۲^۱ ب، ۳^۱ ج، ۴^۱ ج)$  ہو تو ثابت کرو کہ  $\frac{جف}{جف}$  بھی ایک نیم غیر متغیر ہے

(۱۰) ثابت کرو کہ کثیر رقمی  $(۱^۱ ج، ۲^۱ ب، ۳^۱ ج، ۴^۱ ج)$  کے نیم غیر متغیروں

$$۱^۱ ج - ۲^۱ ب، ۲^۱ ب - ۳^۱ ج، ۳^۱ ج - ۴^۱ ج، ۴^۱ ج - ۱^۱ ج$$

سے وہ ہم متغیر پیدا ہوتے ہیں جنکے درجے

$$۲ - ۱، ۳ - ۲، ۴ - ۳، ۵ - ۴$$

ہیں۔



یہ سوال حل ہو جائیگا اگر ہم جملہ

$$\frac{396}{\text{عق} - \text{ہق}} = \frac{396}{(\text{لا} - \text{عی})(\text{لا} - \text{ہق})}$$

کو ع اور و کے سروں کی رقوم میں بیان کریں۔  
اس مقصد کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{396}{\text{عق} - \text{ہق}} = \frac{396}{(\text{لا} - \text{عی})(\text{لا} - \text{ہق})} = \frac{396}{\text{لا} - \text{عہ}} - \frac{396}{\text{لا} - \text{وہ}}$$

اور اگر ع اور و کو لا اور ما کے متجانس تفاضلوں کے طور پر لکھا جائے تو

$$\frac{396}{\text{لا} - \text{عہ}} = \frac{396}{\text{جفلا} - \text{عہ}} = \frac{396}{\text{جفلا} - \text{عہ}} = \frac{396}{\text{جفلا} - \text{عہ}}$$

اس لئے ان قیمتوں کو آخری مساوات میں لکھنے سے

(189)

$$\frac{396}{\text{عق} - \text{ہق}} = \frac{396}{(\text{لا} - \text{عی})(\text{لا} - \text{ہق})} = \frac{396}{\text{جفلا} - \text{عہ}} - \frac{396}{\text{جفلا} - \text{وہ}}$$

جو ع اور و کا جیکو بین ہے۔ یہ بھی دیکھ لینا چاہئے کہ جے (ع، و)

کا صدر سرم ن (ا، ب) ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ دو کثیر رقمیوں کے مشترک اجزائے ضربی ان کے جیکو بین جے (ع، و) کے دوہرے اجزائے ضربی ہوتے ہیں جب کثیر رقمی ایک ہی درجہ ن کے ہوں۔

فرض کرو ع = پ، و = ق، پ = جہاں پ = ل + م۔  
ان کثیر رقمیوں کا جیکو بین جے (ع، و) بناؤ تو معلوم ہو گا کہ اس کا ایک حصہ پ سے تقسیم پذیر ہے اور دوسرا حصہ بظاہر صرف پ سے تقسیم پذیر معلوم ہوتا ہے۔ شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے (یولر کا متجانس تفاضلوں کا



عن کے تین ہم متغیر ہوں تو ثابت کرو کہ مقطع

ا	ا	ا
ب	ب	ب
ج	ج	ج

ایک نیم غیر متغیر ہے۔



## سترہواں باب

(14)

دو درجی، تین درجی اور چار درجی کے ہم متغیر اور غیر متغیر

۱۷۹۔ دو درجی۔ دو درجی کا صرف ایک غیر متغیر ہوتا ہے اور خود دو درجی کے علاوہ کوئی دو سر ہم متغیر نہیں ہوتا۔

کیونکہ اگر دو درجی مسادات

$$ع = ۱ لا + ۲ ب + لا ج = ۰$$

کی اصلیں عہ اور یہ ہوں تو ایسے فرقوں کے تفاعل جن سے غیر متغیر اور ہم متغیر حاصل ہو سکتے ہیں صرف (عہ - یہ) کی جفت قوتیں ہیں جن کا نمونہ (عہ - یہ) <sup>۲</sup>ف ہے۔ (عہ - یہ) کی طاق قوتیں سروں کی رقوم میں منطق شکل میں بیان نہیں ہو سکتیں۔ اسلئے جملہ

$$ع = (عہ - لا) - (یہ - لا) \quad ۲ف$$

کو سروں کی رقوم میں بیان کر کے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ دو درجی کا صرف ایک خاص غیر متغیر <sup>۲</sup>ج - ب ہے اور خود ع سے جدا گانہ ہم متغیر موجود نہیں ہے۔

۱۸۰۔ تین درجی اور اس کے ہم متغیر۔ دفعہ ہذا میں کبھی کے ہم متغیر پر ان اصولوں کے تحت بحث کی جائیگی جو قبل ازیں سمجھا دئے گئے ہیں اور دفعہ آئندہ میں غیر متغیروں اور ہم متغیروں کی بھیک بھیک تعداد معلوم کی جائیگی۔

کبھی کی صورت میں ہم متغیر حاصل کرنیکا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ اصولوں کے فرقوں کے تفاعل میں

عہ' بہ' جہ کی بجائے بہ جہ + عہ لا' جہ + عہ لا' عہ بہ + جہ لا' درج کیا جائے۔ ایسا کرنے میں لسروں سے واسطہ نہ پڑیگا کیونکہ عہ - بہ کو مستحیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{عہ} - \text{بہ} - \text{لا}} = \frac{1}{(\text{بہ} + \text{جہ} + \text{عہ لا}) + (\text{جہ عہ} + \text{بہ لا})}$$

(141) اور کسروں کو دور کرنے سے ہم اوپر کے استحالہ پر پہنچتے ہیں (فرقوں کے تفاعل ہ یا گ دونوں کے لئے رتبہ اور وزن مساوی ہیں)۔ فرقے تفاعلوں کو مستحیل کرنیکا یہ طریقہ اب کبھی کے ہم متغیروں پر استعمال کیا جائیگا۔

(۱) دو درجی ہم متغیر یا ہیسوی ص۔

مساوات

لا' (عہ + سہ بہ + سہ' جہ) (عہ + سہ' بہ + سہ جہ) = لا' (عہ' - لا' بہ) کی دونوں جانبوں کو مستحیل کرنے سے

$$\text{لا'} \{ (\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ' جہ}) + \text{لا} + \text{بہ جہ} + \text{سہ جہ عہ} + \text{سہ' عہ بہ} \}$$

$$\times \{ (\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ جہ}) + \text{لا} + \text{بہ جہ} + \text{سہ' جہ عہ} + \text{سہ عہ بہ} \} = \text{لا' (عہ' - لا' بہ)}$$







تو یہ تین نقطے (ا، ب، ج) مساوات گ = سے متعین ہوتے ہیں۔ (دیکھو مثال ۱۳ صفحہ ۱۲ جلد اول)۔

(۳) کبھی کو دو مکعبوں کے فرق کے طور پر بیان کرنا۔

ہیونیک کے اجزائے ضربی کے فیروے کبھی کو دو مکعبوں کے فرق میں حسب ذیل طریقہ پر بیان کیا جاسکتا ہے:-

$$(ل + لا + ل) - (م + ملا + م) = ۲۴ \frac{۶}{۳} \Delta ل$$

کیونکہ مثال ۶ صفحہ ۱۶۹ جلد اول کے مطابق

$$ل - م = ۲۴ = (ب - ج) (ج - ع) (ع - ی)$$

اس مساوات کو حسب سابق تحویل کرنے سے اسکی دائیں جانب ہو جاتی ہے

$$(ل + لا + ل) - (م + ملا + م)$$

اور مساوات کی بائیں جانب ہو جاتی ہے

$$۲۴ = (ب - ج) (ج - ع) (ع - ی) (لا - ع) (لا - ب) (لا - ج)$$

اور پچھلی مساواتوں سے اندراج کرنے سے

$$(ل + لا + ل) - (م + ملا + م) = ۲۴ \frac{۶}{۳} \Delta ل + ۲۴$$

$$۲۴ = \frac{۶}{۳} \Delta ل$$

(۴) کبھی اور اسکے ہم متغیروں کے درمیان رشتہ۔

انہیں ذیل کا ربط موجود ہوتا ہے:-

(148)

$$گ^۱ + ۴ = ۲ھ^۲ = ۵ع^۲$$

کیونکہ مثال ۶ صفحہ ۱۶۹ جلد اول سے

$$بُ (ب - ج) (ج - ح) (ح - ع) (ع - ف) (ف - ی) = (۲گ^۱ + ۴ھ^۲) ۲ = ۵ ۲ ۴ = ۵ بُ ۲ ۴$$

اور اس مساوات کو حسب سابق مستحیل کرنے سے

$$بُ (ب - ج) (ج - ح) (ح - ع) (ع - ف) (ف - ی) (لا - لا) (ب - لا) (ج - لا) = ۲ ۴ (۲گ^۱ + ۴ھ^۲)$$

اسلئے

$$۵ = ۲گ^۱ + ۴ھ^۲$$

متماثلہ  $گ^۱ + ۴ھ^۲ = ۲ ۴$  سے یہ یوں ہوا کہ 'و' وغیرہ کی بجائے 'ع' وغیرہ درج کرنے سے بھی مندرجہ بالا نتیجہ فوراً حاصل ہوتا ہے۔  
(د) کبھی حاصل۔

جملہ

$$(ع ۱۵ + گ^۱) + (۳ ۱۵ - گ^۱)$$

ع کا ایک خطی جزو ضربی ہے۔

کیونکہ (۲) اور (۳) کے روابط سے

$$۲ بُ (ل + لا) = ۲ ۴ (ع ۱۵ + گ^۱)$$

$$۲ بُ (م + لا) = ۳ ۴ (ع ۱۵ - گ^۱)$$

اور چونکہ ع کا ایک جزو ضربی

$$ل (ل + لا) - (م + لا)$$

ہے اسلئے مسئلہ ثابت ہے۔

کبھی کے ص کی شکل پر و فی سر کیلی نے حاصل کی تھی۔

۱۸۱۔۔۔ کبھی کے غیر متغیروں اور ہم متغیروں کی تعداد۔ چار درجہ

کی بحث شروع کرنے سے پیشتر ہم وہ مسئلہ لیتے ہیں جس کا حوالہ دفعہ ۱۶۲ میں دیا گیا تھا یعنی غیر تابع ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی تعداد کی تعیین۔ اس مقصد کے لئے کبھی کی صورت میں ہمیں حسب ذیل مسئلہ ملتا ہے:-

کبھی کے صرف دو ہم متغیر ہوتے ہیں جنکی صدر قیاس ۵ اور گ ہیں۔ اور صرف ایک غیر متغیر یعنی مینر ۵، جہاں

$$\Delta = \Delta' + \Delta'' \text{ یا } \Delta = \Delta' + \Delta'' + \Delta''' \text{ جہاں } \Delta' = 3 \text{ یا } \Delta' = 4$$

اس کا ثبوت دفعہ ۱۶۲ کے مسئلہ سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ اصولوں کے فرقوں کا کوئی صحیح متشکل تفاعل (۵، ۵، ۵، ۵، ۵، ۵) ہے جو سرز کے ذریعہ منطوق شکل میں بیان ہو سکتا ہے۔ اس مسئلہ میں جس کا حوالہ اوپر دیا گیا ہے یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ۵، ۵ کی شکل

$$g \text{ فا } (5, 5) \text{ یا فا } (5, 5, 5)$$

ہے بموجب اسکے کہ ۵، ۵ اصولوں کا طاق یا جفت تفاعل ہو۔ اسلئے پہلی صورت میں یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اصولوں میں طاق درجہ کا غیر متغیر نہیں ہو سکتا کیونکہ گ فا (۵، ۵، ۵، ۵، ۵، ۵) وہی تفاعل نہیں رہتا جب ۵، ۵، ۵، ۵، ۵ کو علی الترتیب ۵، ۵، ۵، ۵، ۵ میں بدلا جاتا ہے۔ دوسری صورت میں جفت درجہ کا غیر متغیر صرف ایک ہو گا جس کو ۵ کی قوت ہونا چاہئے کیونکہ اگر فا (۵، ۵، ۵، ۵، ۵، ۵) میں ۵ کے علاوہ ۵ یا ۵ شامل ہوں تو یہ وہی تفاعل نہیں رہ سکتا جبکہ سروں کا باہمی تبادلہ اوپر کی طرح عمل میں آتا ہے۔



اسی طرح چونکہ

$$گ = ۱۲ + ۲۱ - ۳۱۱۳$$

اسلئے ہم متغیر

$$گ = ۱۲ + ۲۱ - ۳۱۱۳$$

(145)

حاصل ہوتا ہے جو چھٹے درجہ میں تحویل ہو جاتا ہے، اور اگر اس کو اس طرح لکھا جائے

$$گ = ۱۲ + ۲۱ + ۳۱ + ۱۱ + ۱۳ + ۲۱ + ۱۲$$

تو اوپر کی قیمت کو پھیلانے سے یا زیادہ آسانی کے ساتھ، ماخذ بنانے سے اور دفعہ ۱۶۹ کے متواتر اعمال کی تکمیل کرنے سے سروں کی حسب ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں:-

$$۱ = ۱۲ + ۲۱ + ۳۱ - ۱۱ - ۱۳ - ۲۱ - ۱۲$$

$$۲ = ۱۲ + ۲۱ + ۳۱ - ۱۱ - ۱۳ - ۲۱ - ۱۲$$

$$۳ = ۱۲ + ۲۱ + ۳۱ - ۱۱ - ۱۳ - ۲۱ - ۱۲$$

$$۴ = ۱۲ + ۲۱ + ۳۱ - ۱۱ - ۱۳ - ۲۱ - ۱۲$$

یہاں یہ بات دیکھی جاسکتی ہے کہ جب '۱' معلوم ہو جاتا ہے تو '۲' اور '۳' سے لاقوں کو انکی متعم قیمتوں میں بدل کر اور پورے جملہ کی علامت دفعہ ۱۶۸ کے مطابق تبدیل کر کے '۱' اور '۲' حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

اب ہم دفعات آئندہ میں چار درجی کے ان دو ہم متغیروں کے اہم خواص پر بحث کریں گے۔

۱۸۳۔ چھ درجی ہم متغیر کے دو درجی اجزائے ضربی\* چونکہ گ کے دو درجی اجزائے ضربی ذیل کی بحث میں نمایاں حصہ لیتے ہیں اسلئے پہلے ہم ان اجزائے ضربی کے لئے چار درجی کی

اصولوں کی رقوم میں جملے معلوم کرتے ہیں اور انکے اہم خواص اخذ کرتے ہیں  
عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں گ کے اجزائے ضربی چونکہ یہ ہیں  
بہ + جہ - عہ - ضہ، جہ + عہ - بہ - ضہ، عہ + جہ - جہ - ضہ،

اسلئے ان سے گ کے اجزائے ضربی عہ، بہ، جہ، ضہ کی بجائے

علی الترتیب  $\frac{1}{لا-عہ}$ ،  $\frac{1}{لا-بہ}$ ،  $\frac{1}{لا-جہ}$ ،  $\frac{1}{لا-ضہ}$  درج کر کے اور کسوں کو

دور کرنے کے لئے  $\frac{ع}{ر}$  سے ہر جزو ضربی کو ضرب دیکر حاصل کئے

جاتے ہیں۔

(146) پس ان اجزائے ضربی کو ع، و، ط سے تعبیر کریں تو

$$\left\{ \begin{array}{l} (ع = ع) (لا-بہ + لا-جہ - لا-عہ - لا-ضہ) \\ (و = ع) (لا-جہ + لا-عہ - لا-بہ - لا-ضہ) \\ (ط = ع) (لا-عہ + لا-بہ - لا-جہ - لا-ضہ) \end{array} \right. \dots (1)$$

دیکھو پروفیسر بال کا مضمون، گوارڈی جرنل آف میٹھائیکس جلد ۱۸ صفحہ ۳۶۸ میں۔  
اس مضمون میں چار درجی کے مختلف حلوں پر کامل اور اہم بحث کی گئی ہے۔



اب اگر ع، و، ط کی قیمتوں کو لا کی قوتوں میں ترتیب دیا جائے تو

$$\begin{aligned} \text{ع} &= (\text{ب} + \text{ج} - \text{د} - \text{ض}) - \text{لا} - ۲(\text{ب} + \text{ج} - \text{د} - \text{ض}) - \text{لا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د} - \text{ض} \\ \text{و} &= (\text{ب} + \text{ج} - \text{د} - \text{ض}) - \text{لا} - ۲(\text{ب} + \text{ج} - \text{د} - \text{ض}) - \text{لا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د} - \text{ض} \\ \text{ط} &= (\text{ع} + \text{د} - \text{ب} - \text{ج} - \text{ض}) - \text{لا} - ۲(\text{ع} + \text{د} - \text{ب} - \text{ج} - \text{ض}) - \text{لا} + \text{ع} + \text{د} - \text{ب} - \text{ج} - \text{ض} \end{aligned}$$

اور اس لئے

$$۳۲ = \text{گ} = \text{ا} \text{ ع و ط}$$

مساواتوں (۱) سے ہم آسانی کے ساتھ معلوم کرتے ہیں

$$\text{و} = (\text{ع} - \text{ض}) - (\text{لا} - \text{ب}) - (\text{لا} - \text{ج}) - (\text{لا} - \text{د}) - (\text{لا} - \text{ض})$$

$$\text{ط} = (\text{ع} - \text{ض}) - (\text{لا} - \text{ب}) - (\text{لا} - \text{ج}) + (\text{ب} - \text{ج}) - (\text{لا} - \text{د}) - (\text{لا} - \text{ض})$$

ان سے اور متشابہ مساواتوں سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(۳) \quad \frac{\text{و} - \text{ط}}{\text{م} - \text{ن}} = \frac{\text{ط} - \text{ع}}{\text{ن} - \text{ل}} = \frac{\text{ع} - \text{و}}{\text{ل} - \text{م}} = \frac{\text{ع}}{۴}$$

جہاں ل، م، ن، کے درمی معمولی معنی ہیں (مثال ۱۷ دفعہ ۲)۔  
اور اسلئے

$$(\text{م} - \text{ن}) \text{ع} = (\text{ل} - \text{ن}) \text{و} - (\text{ل} - \text{م}) \text{ط}$$

$$\text{پس } (\text{م} - \text{ن}) \text{ع} = (\text{و} - \text{ل}) - (\text{ط} - \text{ل}) - (\text{و} - \text{ل}) - (\text{ط} - \text{ل}) - (\text{م} - \text{ن})$$

اب جیسا کہ اس متماثلہ مساوات سے ظاہر ہے چونکہ دوسری جانب کے اجزائے ضربی دونوں کامل مربع ہیں اس لئے ہم مان سکتے ہیں

$$\text{و} - \text{ل} - \text{ن} = \text{ط} - \text{ل} - \text{م} = \text{ع} - ۲$$

$$\text{و} - \text{ل} - \text{ن} - \text{ط} - \text{ل} - \text{م} = \text{ع} - ۲$$

$$\text{اسلئے } \text{ط} - \text{ل} - \text{م} = \text{ع} - ۲$$

$$و \text{ لا} - \text{نہ} = ع' + ع''$$

$$ع \text{ لا} - \text{نہ} = ع' + ع''$$

ان قیمتوں سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ گ کے دو درجی اجزائے ضربی 'و'، 'ط' با ہم موسیقی ہیں۔

ساوات گ = کی ہندسی تعبیر کے لئے دفعہ ۶۵ دیکھو۔

۱۸۲۔ گ کے دو درجی اجزائے ضربی کی رقوم میں

طیسوی کو بیان کرنا۔ چونکہ

$$۲۸ - \frac{۱۱}{۲} = ۳ (ع - ب) (لا - ج) (لا - ض)$$

اسلئے رقوم کو ازواج میں ملانے سے اور یہ دیکھنے سے کہ

$$۳ (ب - ج) (ع - ض) = ۳$$

$$۳ (ع - ب) (لا - ج) = ۳ (لا - ض)$$

$$۳ = \{ (ب - ج) (لا - ع) (لا - ض) \}$$

$$+ (ع - ض) (لا - ب) (لا - ج) \}$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے (کیونکہ خطوط وحدانی کے اندر کی مقداریں 'و'، 'ط' ہیں)

$$۲۸ - \frac{۱۱}{۲} = ع' + و' + ط'$$

جو ہ کے لئے مطلوبہ ربط ہے۔

۱۸۵۔ خود چار درجہ کی کوگ کے دو درجہ اجزائے ضربی کی رقوم میں بیان کرنا۔ مساواتوں (۳) سے ۶ کے لئے ایک متشاکل قیمت حاصل کیجا سکتی ہے۔ ان مساواتوں میں لہذا کی بجائے ایسی قیمتیں، مساوات ۲ غم - ۳ غم + ۴ غم = ۵ کی رقوم میں درج کرو تو

$$ٲا(ٲا-ٲا) = ٲا(ٲا-ٲا)؛ ٲا(ٲا-ٲا) = ٲا(ٲا-ٲا)؛$$

$$ٲا(ٲا-ٲا) = ٲا(ٲا-ٲا)؛$$

ان مساواتوں سے ٲا کی اس قیمت کے ذریعہ جو دفعہ ماسبق میں درج ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ٲا(ٲا-ٲا) = ٲا(ٲا-ٲا)؛ ٲا(ٲا-ٲا) = ٲا(ٲا-ٲا)؛$$

$$ٲا(ٲا-ٲا) = ٲا(ٲا-ٲا)؛ (۴)$$

اب ہم ابالات

(148)

$$ٲا = ٲا، ٲا = ٲا، ٲا = ٲا$$

عمل میں لاتے ہیں جہاں ٲا، ٲا، ٲا ممیز ہیں ٲا، ٲا، ٲا کے اس طرح ٲا، ٲا، ٲا کی بجائے تین دو درجہ کی ٲا، ٲا، ٲا سے جنکے ممیز ایک کے مساوی ہیں داخل ہو جاتے ہیں۔ اس متحال کے ذریعہ دو درجہ کی شکلیں بھی متعین ہو جاتی ہیں اور ان کے مربع کو ملائیوالات متشاکل رشتہ (دیکھو مثال ۶ (۱) صفحہ ۲۱۸) اپنی سادہ ترین

شکل میں بیان ہو جاتا ہے۔ مینروں کو محسوب کرنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$۱. ۵ = (ب + ج - غ) - (ع + ض) - (ع + ض) - (ب + ج) - (ب + ج - غ)$$

اور متشابه قیمتیں ۵ اور ۵ کے لئے۔ اسلئے

$$۵ = (ل - م) (ل - ن) = ۵ = (م - ن) (م - ل) = ۵ = (ن - ل) (ن - م)$$

ان ابدالات کو عمل میں لانے سے پچھلی مساواتیں

$$(غ - غ) (غ - غ) (غ - غ) = لا = ۵ - غ$$

$$(غ - غ) (غ - غ) (غ - غ) = ما = ۵ - غ \quad (۵)$$

$$(غ - غ) (غ - غ) (غ - غ) = ۵ = ۵ - غ$$

ہو جاتی ہیں۔ ان سے ۵ اور ۵ کی حسب ذیل قیمتیں اور لا

ما سے کو ملائیوا لا متماثل رشتہ آسانی کے ساتھ اخذ ہوتے ہیں۔

$$۵ = غ لا + غ ما + غ ۵$$

$$۶ - غ لا + غ ما + غ ۵ = ۵ \quad (۶)$$

$$= لا + ما + ۵$$

جہاں جیسا کہ ثابت کر دیا گیا ہے لا، ما، ۵ تین باہم موسیقی دو درجی ہیں جنکے مینر ہر صورت میں اکائی میں تحویل ہوتے ہیں۔ گ کی قیمت لا، ما، ۵ کی رقوم میں اس طرح بیان ہو سکتی ہے۔

چونکہ ۳۲ گ = لا ع و ط اور

$$\begin{aligned} \text{ع}^۱ \text{و}^۱ \text{ط}^۱ &= (\text{م}^۱ - \text{ن}^۱)(\text{ل}^۱ - \text{ز}^۱) = (\text{م}^۱ - \text{ل}^۱) \text{لا}^۱ \text{ما}^۱ \text{ے}^۱ \\ &= \frac{۲۵۱}{۷} (\text{ع}^۲ - ۲۰ \text{جے}^۲) \text{لا}^۱ \text{ما}^۱ \text{ے}^۱ \end{aligned}$$

$$\text{اسلئے گ}^۱ = \frac{۱}{۷} (\text{ع}^۲ - ۲۰ \text{جے}^۲) \text{لا}^۱ \text{ما}^۱ \text{ے}^۱$$

۱۸۶ - چار درجہ کی تحلیل - مساواتوں (149)

$$۶ = \text{غ}^۱ \text{لا}^۱ + \text{غ}^۱ \text{ما}^۱ + \text{غ}^۱ \text{ے}^۱$$

$$۰ = \text{لا}^۱ + \text{ما}^۱ + \text{ے}^۱$$

سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$۶ = (\text{غ}^۱ - \text{غ}^۱) \text{ما}^۱ + (\text{غ}^۱ - \text{غ}^۱) \text{ے}^۱ = ۶ (\text{غ}^۱ - \text{غ}^۱) \text{ے}^۱$$

$$+ (\text{غ}^۱ - \text{غ}^۱) \text{لا}^۱ = ۶ (\text{غ}^۱ - \text{غ}^۱) \text{لا}^۱ + (\text{غ}^۱ - \text{غ}^۱) \text{ما}^۱$$

جہاں 'لا'، 'ما'، 'ے' کی قیمتیں مساواتوں (۵) سے متعین ہوتی

ہیں۔ ۶ کی ان قیمتوں کو انکے اجزائے ضربی میں تجویز کرنے سے ہمیں ۶ کو تحلیل کرنے کے تین طریقے ملتے ہیں جو مساوات

$$۲ \text{ غ}^۱ - ۲ \text{ غ}^۱ + ۶ \text{ جے}^۲ = ۰$$

کے حل پر منحصر ہیں۔

پروفیسر کیلی نے چار درجہ کی تحلیل ایک متشاکل شکل میں پیش

کی ہے جو ۶ اور ۷ کے لئے دئے ہوئے جملوں سے آسانی

کے ساتھ ماخوذ ہو سکتی ہے۔ چونکہ بالعموم

$$\text{ل}^۱ (\text{لا}^۱ + ۲ \text{ب}^۱ \text{لا}^۱ + \text{ج}^۱ \text{ما}^۱) + \text{م}^۱ (\text{لا}^۱ + ۲ \text{ب}^۱ \text{لا}^۱ + \text{ج}^۱ \text{ما}^۱) + \text{ن}^۱ (\text{لا}^۱ + ۲ \text{ب}^۱ \text{لا}^۱ + \text{ج}^۱ \text{ما}^۱)$$

ایک کامل مربع ہوتا ہے جبکہ

$$3 \text{ ل} (\text{ل ج} - \text{ب}^2) + 3 \text{ م ن} (\text{ل ج} + \text{ل ج} - 2 \text{ ب}^2 \text{ ب}^2) = \text{اصلہ}$$

ل لا + م ما + ن سے  
کامل مربع ہے جبکہ

ل + م + ن =  
جہاں لا 'ما' سے باہم موسیقی ہیں اور ان کے مینز ہر ایک 'اکائی' میں تحویل ہوئے ہیں۔  
اس لئے ۶ کی تحلیل ل 'م' ن کی ایسی قیمتیں معلوم کرنے پر منحصر ہوتی ہے کہ عام دو درجی

$$\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن سے}$$

$$\text{یا ل لا غم} - \text{غم} - \text{لا غم} + \text{م ما غم} - \text{غم} - \text{لا غم} - \text{غم} - \text{لا غم}$$

$$+ \text{ن ما غم} - \text{غم} - \text{لا غم} - \text{لا غم}$$

ایک کامل مربع ہو اور وہ معدوم ہو جبکہ ۶ معدوم ہو جائے۔  
کسی اصل لا = ۶ کے جواب میں یہ قیمتیں اس طور پر معلوم ہو سکتی

ہیں کہ لا غم - غم 'لا غم - غم' لا غم - غم کے لئے قیمتوں کا

کوئی نظام لیا جائے اور کامل مربعوں ۶ - غم - غم - غم - غم - غم - غم - غم

کے جذروں کے لئے ایسی قیمتیں لی جائیں کہ ان میں سے ہر جذر کی

لا = ۶ کے لئے ایک ہی قیمت حاصل ہو۔ پھر لا 'ما' سے کیلئے

ذیل کی معین قیمتیں لی جائیں

لا = لا غم - عم | لا غم - عم | لا غم - عم | لا غم - عم - غم - غم - غم  
 علیٰ ہذا القیاس ما اور سے کے لئے -  
 پس ل، م، ن کو ذیل کی مساواتیں پوری کرنی چاہئیں :-

ل = لا غم - غم + م = لا غم - غم + ن = لا غم - غم + م + ن =  
 اب یہ مساواتیں سرکجا پوری ہوتی ہیں اگر

$$\frac{ل}{لا غم - غم} = \frac{م}{لا غم - غم} = \frac{ن}{لا غم - غم}$$

اسلئے آخر الامر کے چار خطی اجزائے ضربی کے مربع ہونے چاہئیں

(غم - غم) | لا غم - عم | لا غم - عم | لا غم - عم | لا غم - عم | لا غم - عم  
 جن کا حاصل ضرب ۵۷ ہے -

اگر چار درجہ ک ۶ - لہ ۷۷ کو حل کرنا مطلوب ہو تو اسی طرح ہم  
 ل، م، ن کی ایسی قیمتیں منتخب کر سکتے ہیں کہ ل + م + ن =  
 کامل مربع ہو جائے اور اسوقت معدوم ہو جیکہ ک ۶ - لہ ۷۷ معدوم  
 ہو جائے - قیمتیں اس طرح معلوم ہو سکتی ہیں کہ

لا غم - غم | لا غم - غم | لا غم - غم | لا غم - غم | لا غم - غم | لا غم - غم  
 ایک معین نظام لیا جائے اور

$$\frac{لا غم - غم}{لا غم - غم} = \frac{ک - غم}{ک - غم} \left\{ \frac{لا غم - غم}{لا غم - غم} \right\}$$

لکھا جائے جہاں  $m = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{e}{f}$  کے لئے متشابه قیمتوں کے مکمل مربعوں

کے جذروں کے لئے ایسی قیمتیں انتخاب کی جائیں کہ وہ  $a, b, c, d, e, f$  کی ایک معین اصل  $e$  کے لئے مساوی ہوں اور

$$a = \frac{a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - e^2 - f^2}{2a}$$

رکھا جائے مہم کی متشابه قیمتوں کے۔۔۔ تب  $L, M, N$  کو ذیل کی مساواتیں پوری کرنی چاہئیں:۔

$$L^2 + M^2 + N^2 = 0$$

$$L = \frac{a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - e^2 - f^2}{2a} + M = \frac{a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - e^2 - f^2}{2a}$$

$$N = \frac{a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - e^2 - f^2}{2a} = 0$$

(151)

یہ مساواتیں صریحاً پوری ہوتی ہیں اگر

$$L = \frac{a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - e^2 - f^2}{2a} = \frac{a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - e^2 - f^2}{2a}$$



جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ک - ۶ - لہ =۔ کے ایک خطی جزو ضربی  
کا مربع ل کا + م ما + ن ے ہے۔

۱۸۷ - ک - ۶ - لہ کے غیر متغیر اور ہم متغیر - دفعہ ۱۸۵

کی مساواتیں (۶) استعمال کر کے اور لا + ما + ے کو و سے

تعبیر کر کے ہم لہ - ک ۶ میں - لہ ۶ و جمع کرنے سے  
اسکو شکل

$$لا + ما + ے$$

میں تحویل کر سکتے ہیں جہاں لا + ما + ے =۔ جب وہ اس  
شکل میں تحویل ہو جائے تو ہمیں لا، ما، ے کی حسب ذیل تحویل شدہ  
قیمتیں ملتی ہیں:-

$$لا = ک (۲ غم - غم) + لہ (۲ غم - غم - غم - غم)$$

$$ما = ک (۲ غم - غم) + لہ (۲ غم - غم - غم - غم)$$

$$ے = ک (۲ غم - غم) + لہ (۲ غم - غم - غم - غم)$$

شکلوں غم لا + غم ما + غم ے اور لا + ما + ے  
کی متناہت کی وجہ سے جو ایک ہی نمونہ کی ہیں یہ ظاہر ہے کہ لا ما ے بھی ک - ۶ - لہ  
کے چھ درجہ ہی متغیر کے اجزائے ضربی ہیں اور اسکا ہیضوی لا + ما + ے ہے۔  
اس کی تصدیق ہم راست حساب لگا کر کر سکتے ہیں۔ اسلئے ہم ک - ۶ - لہ کے  
غیر متغیر اور ہم متغیر اس طرح محسوب کرتے ہیں کہ ۶ کے غیر متغیروں اور ہم متغیروں کے جملوں میں

غم، غم، غم، کو ک، ک، ک سے بدل دیتے ہیں۔  
اب چونکہ

$$ع = \frac{۲}{۳} \{ (غم-غم) + (غم-غم) + (غم-غم) \}$$

$$جے = ۴ غم، غم، غم$$

اور ک-ک = (غم-غم) (ک-لہ غم) ک-ک = (غم-غم) (ک-لہ غم)  
ک-ک = (غم-غم) (ک-لہ غم)

اسلئے کہ ۶- لہ کے غیر متغیروں کے لئے ہمیں حسب ذیل  
قیمتیں ملتی ہیں:-

$$ع = ع ک - ۳ جے ک لہ + \frac{۲}{۱۲} لہ$$

$$جے = جے ک - \frac{۲}{۶} ع ک لہ + \frac{۲}{۴} جے ک لہ - \frac{۲}{۲۱۶} ع لہ$$

اگر ہم ۹ کے ہم متغیر لہ اور لہ بنائیں جہاں

$$۹ = ۴ ک - ع ک لہ + جے لہ$$

(جو محول کبھی ہے جسکو ک لہ میں متجانس بنایا گیا ہے) تو ایم ہرٹ  
(M. Hermite) کے بیان کی بموجب ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$ع = ۱۲ لہ - جے لہ + ۴ ک لہ$$

نیز کہ ۶- لہ کا محسوس محسوب کر سیکے لئے ہم

$$ب^۱ لا^۱ + ب^۱ ما^۱ + ب^۱ اے^۱$$

کو ابدالات

$$غ^۱ لا^۱ + غ^۱ ما^۱ + غ^۱ اے^۱ = - \frac{۱}{۴} ع^۱ ع^۱$$

$$غ^۱ لا^۱ + غ^۱ ما^۱ + غ^۱ اے^۱ = \frac{۱}{۴} (ع^۱ ع^۱ + جے^۱ جے^۱)$$

کے ذریعہ تحویل کرتے ہیں۔ یہ متماثلہ مساواتیں 'مساواتوں

$$غ^۱ = غ^۱ غ^۱ + \frac{۱}{۴} ع^۱ = غ^۱ غ^۱ + \frac{۱}{۴} ع^۱ = غ^۱ غ^۱ + \frac{۱}{۴} ع^۱$$

کو علی الترتیب پہلے 'غ^۱ لا^۱'، 'غ^۱ ما^۱'، 'غ^۱ اے^۱' سے اور پھر

'غ^۱ لا^۱'، 'غ^۱ ما^۱'، 'غ^۱ اے^۱' سے ضرب دیکر جمع کرنے سے حاصل

ہوئی ہیں۔

اس طرح ک ۶۔ ل ۷ کے عیسوی کیلئے ہمیں حسب ذیل شکل ملتی ہے:-

$$\frac{۱}{۴} \{ (۴ ک^۱ - \frac{۱}{۴} ل^۱) - (۶ ع^۱ ک^۱ - جے^۱ ل^۱) \}$$

اس کو شکل

$$\frac{۱}{۴} (۴ جف ک^۱ + ۶ جف ل^۱)$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے اور یہ ک ۶۔ ل ۷ اور عیسوی کے جیکوین کا

ایک قیف ہے جبکہ متغیر ک اور ل ہوں۔

نیز چونکہ

$$ع - ۲۰ = ۲۰ \text{ جے } ۱۶ = (غ - غ) (غ - غ) (غ - غ) (غ - غ)$$

$$اور \quad گ = \frac{۱}{۲} \sqrt{ع - ۲۰} \text{ جے } ۲۰ \times لا \text{ ماے } ۱$$

اسلئے غ، غ، غ، غ کو 'ما'، 'ما'، 'ما'، 'ما' میں بدلنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

(153)

$$ع - ۲۰ = ۲۰ \text{ جے } ۱۶ = (ع - ۲۰) (ع - ۲۰) (ع - ۲۰) (ع - ۲۰)$$

$$گ = وگ$$

پس ہم نے ک - ع - لا کے غیر متغیروں اور ہم متغیروں کو  
ع کے غیر متغیروں اور ہم متغیروں کی رقوم میں بیان کر دیا۔

۱۸۸۔ چار درجہ کی ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی تعداد

اب ہم مسئلہ ذیل ثابت کرتے ہیں جو ان تفاعلوں کی تعداد معین کرتا ہے

چار درجہ کی صرف دو جداگانہ غیر متغیر ع اور جے

ہوتے ہیں اور صرف دو جداگانہ ہم متغیر جنکے صدر سرھ اور  
گ ہیں۔

یہ مسئلہ اس بات کو بیان کرتا ہے کہ ہر غیر متغیر ع اور جے  
کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے اور ہر ہم متغیر ع، گ، ع، جے  
کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے۔ جب ذیل بحث کی بنیاد وہ اصول ہیں جو

کبھی کی صورت میں استعمال کردہ اصولوں کے مشابہ ہیں۔ دفعہ ۱۶۳ کے مسئلہ میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر اصولوں کے فرقوں کا کوئی صحیح تفاعل فہ (عہ، بہ، چہ، ضہ) ہو جو منطق شکل میں سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے تو اس فہ (عہ، بہ، چہ، ضہ) کو شکل

گ (ا، ہ، ع، جے) یا فا (ا، ہ، ع، جے)

میں بیان کیا جاسکتا ہے بوجہ اس کے کہ فہ طاق ہو یا جفت۔

اب اگر فا (ا، ہ، ع، جے) ایک غیر متغیر ہے تو ا اور ہ معدوم ہونے چاہئیں کیونکہ اگر وہ موجود ہوں تو یہ تفاعل وہی نہیں رہ سکتا جب سروں کو سیدھی یا الٹی ترتیب میں لکھا جاتا ہے۔ اسی طرح کسی طاق تفاعل سے جے گ (ا، ہ، ع، جے) غیر متغیر حاصل نہیں ہو سکتا پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہر غیر متغیر ع اور جے کا تفاعل ہے۔

نیز چار درجی کے صرف دو جدا گانہ اہم متغیر ہوتے ہیں کیونکہ ہم نے یہ ثابت کیا ہے کہ فرقوں کا ہر تفاعل

فا (ا، ہ، ع، جے) گ (ا، ہ، ع، جے)

میں سے کوئی ایک شکل اختیار کرتا ہے۔  
اب ان شکلوں کو ہم متغیروں کے صدر سروں کے طور پر لیکر یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ ہر اہم متغیر شکلوں

فا (ا، ہ، ع، جے) گ (ا، ہ، ع، جے)

میں سے کسی ایک شکل میں بیان ہو سکتا ہے یعنی ہر اہم متغیر گ (ا، ہ، ع، جے) کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔  
پس مسئلہ بالا ثابت ہو چکا۔

## مثالیں

۱۔ اگر  $\epsilon$  کوئی کبھی ہو اور  $g$  ایسا کبھی ہم متغیر تو ثابت کرو کہ  $\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{g}$  کے عیسوی کی وہی اصلیں ہیں جو  $\epsilon$  کے عیسوی کی ہیں چنانچہ اور  $\frac{1}{\epsilon}$  مستقل ہیں۔

۲۔ ثابت کرو کہ کثیر رقی کا کوئی ہم متغیر مسادات

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} + \dots + \frac{1}{\epsilon_n}$$

کو پورا کرتا ہے جہاں کثیر رقی کی اصلیں  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  عین ہیں، سردوں میں  $\frac{1}{\epsilon}$  کا درجہ  $\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} + \dots + \frac{1}{\epsilon_n}$  ہے اور  $\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} + \dots + \frac{1}{\epsilon_n}$ ۔

۳۔ اگر کثیر رقی کا ایک جزو ضربی مربع ہو تو اس کے عیسوی میں بھی مربع جزو ضربی داخل ہوتا ہے۔

۴۔ اگر چار درجہ کا ایک جزو ضربی مربع ہو تو ثابت کرو کہ یہ جزو ضربی ہم متغیر  $\frac{1}{\epsilon}$  میں پہچمے جزو ضربی کے طور پر داخل ہوتا ہے۔ اس صورت میں  $\epsilon$  و  $\frac{1}{\epsilon}$  کی قیمتیں معلوم کرو۔ (دیکھو دفعہ ۱۳۶)

۵۔ اگر  $\frac{1}{\epsilon}$  (لا) اور  $\frac{1}{\epsilon}$  (لا) میں درجہ کے دو کثیر رقی ہوں اور  $\frac{1}{\epsilon}$  (لا) کی اصلیں  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  عین ہوں تو بتاؤ کہ ان کا جیکو بین اس طرح بیان ہو سکتا ہے:-

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} + \dots + \frac{1}{\epsilon_n}$$

اور بالخصوص ثابت کرو کہ چار درجہ  $\frac{1}{\epsilon}$  (لا) کا چہ درجہ ہم متغیر  $\frac{1}{\epsilon}$  شکل

$$\left\{ \text{فہ (لا)} \right\} \equiv \frac{\text{فہ (عہ)}}{\text{(لا-عہ)}}$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

۶۔ چار درجہ کے لئے ثابت کرو کہ زودرجیوں

$$\frac{\text{(لا-عہ)}}{\text{فہ (عہ)}} ، \frac{\text{(لا-عہ)}}{\text{فہ (عہ)}} ، \frac{\text{(لا-عہ)}}{\text{فہ (عہ)}} ، \frac{\text{(لا-عہ)}}{\text{فہ (عہ)}}$$

میں سے کسی دو کا مجموعہ 'خ' کے چھ درجہ ہم متغیر کا ایک جزو ضربی ہے جہاں اسکو اصولوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے۔  
۷۔ اگر

$$\text{فہ (لا)} \equiv \text{فہ (لا-عہ)} \text{ (لا-عہ)} \text{ (لا-عہ)} \text{ (لا-عہ)} \text{ (لا-عہ)} \text{ (لا-عہ)}$$

کا میٹر ۵ ہو تو ثابت کرو کہ وہ مساوات جس کی اصلیں غیر منطق ہم متغیر

$$\text{ی} \equiv \frac{\text{لا-عہ}}{\text{فہ (عہ)}}$$

کی ن قیمتیں ہیں فہ (لا) کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی رقوم میں ایک منطق شکل میں بیان ہو سکتی ہے جیکہ لا کو طح کیا جاتا ہے۔ تاہم ی کی وہ قیمتیں جو علی الترتیب  $n = ۳$  اور  $n = ۴$  رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں کبھی اور چار درجہ کے ان حلوں کے عددی اضغاف ہیں جنکو کیلی سمنے دریافت کیا ہے (دفعات ۱۰، ۱۸۶)۔

۸۔ دفعہ ۱۸۸ کے اصولوں کو استعمال کر کے چار درجہ لہ عہ +

مہ لا کے چھ درجہ ہم متغیر کی شکل بغیر عمل حساب کے معلوم کرو۔

۹۔ چار درجہ کے ہیوی کیلئے 'ح'، 'ع'، 'گ'، 'جے' کی قیمتیں محسوب کرو۔

$$\text{جواب :- ح} = \frac{۳ \text{ لہ جے} - \text{ع} \text{ ح}}{۱۲} = \frac{\text{ع} \text{ ح} - \text{ع} \text{ ح}}{۱۲} = \frac{\text{جے} \text{ گ}}{۴}$$









رقوم میں بیان کیا جائے تو دونوں اس شکل

$$(\text{ا}^1, \text{ب}^1) (\text{ا}^2, \text{ب}^2)$$

کے ہیں۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ چار درجی

ف (لا، ما) = (ا، ب، ج، د، ص) (لا، ما)  
ایک خطی استحالہ لا = لا + ما، ما = لا + ما کے ذریعہ شکل

$$\text{ف} (\text{ل}^1, \text{ل}^2) (\text{ا}^1, \text{ا}^2) = \text{ف} (\text{م}^1, \text{م}^2) (\text{ا}^1, \text{ا}^2) + \text{غ} (\text{م}^1, \text{م}^2) (\text{ا}^1, \text{ا}^2)$$

میں تبدیل ہو سکتا ہے جہاں

$$\text{غ}^2 = \text{ع} + \text{غ} = \text{م}^2 = \text{ل}^2 - \text{ل}^1 - \text{م}^1$$

۲۰۔ پچھلی مثال کی ترقیم کو قائم رکھ کر ثابت کرو کہ چار درجی کے  
چھ درجی اہم تغیر کے اجزائے ضربی 'ا' و 'ط' میں سے ایک کی اضلیں

لے اور مے ہیں۔ (دفعہ ۱۸۳)

۲۱۔ ثابت کرو کہ

$$\text{فرگ}^2 = ۶۰ (\text{ع}^1, \text{ع}^2) - ۶ (\text{ع}^1, \text{ع}^2)$$

یہ دفعہ ۶۵ کا تحول کبھی ہے (دیکھو مثال ۵ صفحہ ۱۹۵ جلد اول)

۲۲۔ ثابت کرو کہ

$$\text{غ}^2 (\text{ا}^1, \text{ا}^2) + \text{غ}^2 (\text{م}^1, \text{م}^2) = \text{غ}^2 (\text{پ}^1, \text{پ}^2) - \text{غ}^2 (\text{پ}^1, \text{پ}^2)$$

جہاں  $\text{پ}^1$  اور  $\text{پ}^2$  متجانس عامل ضربوں کے مجموعے ہیں۔



# اٹھارواں باب

## مجموع شکلوں کے ہم متغیر اور غیر متغیر

۱۸۹۔ مجموع شکلیں۔ اس باب میں ہم دو یا زیادہ

کثیر رقیوں کے نظاموں کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کے نظریہ کی وضاحت سادہ ترین صورتوں یعنی (۱) دو دو درجیوں،

(۲) دو درجی اور کعبی، (۳) دو کعبیوں کے ذریعہ کریں گے۔ ہر صورت میں ان

شکلوں کا شمار کیا جائیگا جنکا بنیادی اہمیت رکھنا کلبش (Clebsch)

گارڈن (Gordan) اور سلوٹر (Sylvester) نے ثابت کیا ہے

ہم یہ بتائیں گے کہ یہ شکلیں کس طرح حاصل کی جاسکتی ہیں لیکن اس بات کی

کو شش نہیں کریں گے کہ ان سے تمام دوسری شکلیں جو ان پر منحصر ہیں کس طرح

نحوں کی جاسکتی ہیں۔ مجموع نظام کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی تعداد کی تخمین میں وہ

غیر تابع اشکال جو ہر کثیر رقی سے تعلق رکھتی ہیں (یعنی ہر کثیر رقی کے اپنے

غیر متغیر اور ہم متغیر) اس کل تعداد میں شامل کی جاتی ہیں جو نظام سے تعلق

رہے۔ یہ سوئٹ جنس ہو گا کہ ہم اصطلاح ”خاص“ ان شکلوں کے موسوم

کریں گے۔ استعمال میں جو دو کثیر رقیوں سے (جنکو ایک نظام

سمجھا گیا ہے) تعلق تھا تاکہ ان شکلوں سے تیز ہو سکے جو علاحدہ لئے ہو

کثیر رقیوں سے تعلق رکھتی ہیں۔

غیر متغیروں اور ہم متغیروں دونوں کا ایک نام ”ہم رو“ ہو سکتا ہے

یہ نام کسی ایسے متقابل کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے جس کے رشتے کثیر رقمیوں کے ساتھ خطی استحالیہ پر منحصر نہیں ہوتے۔

۱۹۰۔ دو دو درجی۔ فرض کرو کہ دو دو درجی یہ ہیں

$$۶ \equiv ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب} \text{ لا} + ۳ \text{ ما} \quad ۷ \equiv ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب} \text{ لا} + ۳ \text{ ما}$$

اس نظام کا ایک خاص غیر متغیر ہے اور ایک خاص ہم متغیر۔  $۶ + ۷$  سے کامیاب بنانے سے یہ غیر متغیر حاصل ہو سکتا ہے۔ چنانچہ اس جملہ کا میز ہے

$$۱ \text{ لا} - ۲ \text{ ب} + ۳ \text{ ما} + ۲ \text{ ب} - ۳ \text{ ما} + ۱ \text{ لا} - ۲ \text{ ب} + ۳ \text{ ما}$$

جس میں  $۱$ ،  $۲$ ،  $۳$  کے تمام سر غیر متغیر ہیں (دفعہ ۱۴۵)۔ اسلئے خاص غیر متغیر (۱۵۹) حاصل ہوتا ہے

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب} - ۳ \text{ ما} \equiv ۲ \text{ ب} - ۳ \text{ ما} + ۱ \text{ لا}$$

سروں کے اس متقابل کا معدوم ہونا اس بات کی شرط ہے کہ خطوط  $۶ + ۷$  کا پنسل موسیقی ہے، ایک سادات سے تعبیر ہونیوالی شعاعیں دوسری سادات سے تعبیر ہونیوالی شعاعوں کی مزدوج ہیں۔

خاص ہم متغیر دئے ہوئے نظام کا جیکوین ہے جسکو ہم لکھ سکتے ہیں

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب} - ۳ \text{ ما} \equiv ۲ \text{ ب} - ۳ \text{ ما} + ۱ \text{ لا} \quad ۶ + ۷$$

اسکو اس شکل

۱	۲	۳
لا	لا	لا
ب	ب	ب
ما	ما	ما

میں لکھا جاسکتا ہے جو کثیر رتبیوں  $و' و' (لاآ - لاآ)$  سے متغیر ویکو  
 نین تخلیلی طور پر ساقط کرنے سے حاصل ہوا ہے، شکل لاآ - لاآ،  
 تمام تنائی کثیر رتبیوں کا کلی ہم رو ہے (دفعہ ۱۷۵)۔ لہ اور مہ کو ان  
 ساداتوں سے جو متماثلہ لہ + مہ و  $و' و' (لاآ - لاآ)$  میں سرور کا  
 مقابلہ کرنے سے حاصل ہوتی ہیں ساقط کرنے سے بھی جے (ع' و')  
 کی یہ شکل حاصل ہو سکتی ہے۔  
 جے کا مربع ع' اور و کے ساتھ حسب ذیل اہم رشتہ رکھتا ہے۔

$$- جے (ع' و') = ع' ع' - ع' ع' + ع' ع' + ع' و' \quad (۱۱)$$

اسکو اس مساوات

$$\begin{vmatrix} و' & ع' & ۰ \\ ع' & ع' & ع' \\ ع' & ع' & و' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} لاآ & لاآ & لاآ \\ ج' & ج' & ج' \\ ج' & ج' & ج' \end{vmatrix}$$

سے فوراً اخذ کیا جاسکتا ہے۔

اب یہ دیکھنا آسان ہے کہ جے (ع' و') سے نظام لہ + مہ و  
 کے دوسرے خطوط ملتے ہیں کیونکہ جب لہ + مہ و کامل مربع ہوتا  
 ہے تو

$$لہ' ع' + لہ' مہ' ع' + مہ' ع' = ع' ع'$$

اور مساوات لہ ع' + مہ و = کے ذریعہ لہ' مہ' کو ساقط کرنے سے  
 مساوات

$$ع' ع' - ع' ع' + ع' ع' + ع' و' = ۰$$

یعنی جے (ع، و) = ۰۔  
 سے دو ہرے خطوط متعین ہوتے ہیں۔  
 دو دو درجیوں کے نظام کا ہر ہم روچھ شکلوں ع، و جے (ع، و)  
 ع، ع، ع کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔ یہ تمام شکلیں مندرجہ  
 بالا ضابطہ (۱) کے اجزائے ترکیبی ہیں۔ مثلاً ع، و کا حاصل ہے  
 ۴ (ع ع - ع ع) (دفعہ ۱۵۰)  
 اور یہ جے (ع، و) کا مینز بھی ہے اور ع، و جے (ع، و)  
 کا بنی تحلیل حاصل استقامت بھی۔  
 ۱۹۱۔ دو درجی اور کبھی۔ فرض کرو کہ دو کثیر رقی ہیں  
 ع ≡ (ا، ب، ج، د) (لا، ما) و ≡ (ا، ب، ج، د) (لا، ما)  
 ع کے ہم تغیر حسب معمول ھ اور گ سے تعبیر ہوتے ہیں۔  
 اس نظام کا ایک خاص کبھی ہم تغیر ہے یعنی ع اور و کا جیکو بین یا  
 جے (ع، و) اور ایک خاص دو درجی ہم تغیر یا جے (ھ، و)  
 باقی ہم تغیروں کو لکھ لینے میں حسب ذیل ترتیم کا اختیار کرنا  
 سہولت بخش ہو گا:-  
 ع میں لا، ما کی بجائے تفرقی علامتیں عفا (جف، ما) و  
 - عفا (جف، لا) علی الترتیب درج کرنے سے جو نتیجہ حاصل  
 ہوتا ہے اسکو تغیر کر نیکی لئے ہم ع کے ساتھ لاحقہ عفا لگا دیں گے



ع = (ا' ب' ج' د') (عف' - عف')<sup>۳</sup>

و = (ا' ب' ج') (عف' - عف')<sup>۲</sup>

اور ایسی ہی ترقیم دو سری صورتوں میں -  
چار خطی ہم متغیر ہیں جنکو ب اس طرح لکھا جاسکتا ہے:-

ع (ع) ع (گ) ع (و) ع (ف) ع (گ) ع (و)

ان میں سے پہلے ہم متغیر کو پوری طرح لکھا جائے تو وہ ہے  
(ا' ج' - ب' ج' + ج' ا') لا + (ب' ج' - ج' ب' + ج' ا') ما  
تین خاص غیر متغیر ہیں - پہلا غیر متغیر دو درجیوں ھلا اور و  
کے نظام کا درمیانی غیر متغیر ہے یعنی

(167)

(ا' ج' - ب' ج' - (ا' د' - ب' ج') ب' + (ب' د' - ج' ا') ا' = ع

جہاں ترقیم ع اس بات کو بتانے کے لئے استعمال کی گئی ہے کہ غیر متغیر

ع کے سروں میں ف دیں درجہ کا اور و کے سروں میں ق دیں  
درجہ کا ہے - دوسرا غیر متغیر کثیر رقمیوں ع اور و کا حاصل انقاط  
کا ہے - یہ غیر متغیر ع کے سروں میں دو سرے درجہ کا اور و کے  
سروں میں تیسرے درجہ کا ہے اور اسکو چودھویں باب کے انقاط  
کے طریقوں سے متعدد شکلوں میں بیان کیا جاسکتا ہے - اس  
نمونہ کے کسی غیر متغیر ع کی عام شکل یہ ہے

ع = ل + م (ا' ج' - ب' ا') ع

جہاں ل اور م کوئی عدد ہیں -

تیسرا غیر متغیر (جو معوج ہے) نمونہ ع کا ہے اور و سے  
 علی الترتیب تین مرتبہ ع اور گ کے حاصل ضرب پر عمل کرنے سے  
 حاصل ہو سکتا ہے۔ چنانچہ اسکو اس شکل

$$و^۲ (ع گ)$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

پس اس نظام سے متعلق نو خاص شکلیں ہیں اور اگر ان میں ع  
 اور و اور ہر ایک کے غیر تابع ہم متغیروں اور غیر متغیروں کو شامل  
 کیا جائے تو ہمیں پندرہ شکلوں کی پوری فہرست ملتی ہے یعنی تین  
 دو درجی، تین کعبی، چار خطی ہم متغیر اور پانچ غیر متغیر۔

۱۹۲۔ دو کعبی۔ فرض کرو کہ کعبی ہیں

$$ع \equiv (ا' ب' ج' د') (لا' ما') و \equiv (ا' ب' ج' د') (لا' ما')$$

اور ع کے ہم متغیر ب معمول ہے اور گ سے اور و کے ہم متغیر

ہے اور گ سے تعبیر ہوتے ہیں۔

اس نظام کا ایک چار درجی ہم متغیر ع اور و کا ایکوین

ہے یعنی

$$جے (ع' و) \equiv (ا' ب') لا + ۲ (ج' د') لا + ۱ (د')$$

$$+ ۳ (ب' ج') لا + لا + ۲ (ب' د') لا + ۲ (ج' د') لا$$

اور دو خاص کعبی ہم متغیر ہیں یعنی

$$جے (ع' ہ) اور جے (و' ہ)$$

چار خاص دو درجی ہم متغیر ہیں۔ اگر ہم ل ع + م و کا ہیسیو

بنائیں یعنی  $ہ$  میں  $ا$  ب وغیرہ کی بجائے  $ل$  +  $م$  +  $ن$  +  
 $ل$  ب +  $م$  ب +  $ن$  ب وغیرہ درج کریں تو

$ل$   $ہ$  +  $ل$   $م$  +  $ل$   $ن$  +  $ہ$   $ہ$

مائل ہوتا ہے۔ درمیانی جیسوی  $م$  جو یہاں حاصل ہوا ہے پہلا خاص  
 دو درجہ ایہم متغیر ہے اور بقیہ تین ایہم متغیر  $ہ$   $ا$   $ب$  اور  $ہ$   
 میں سے دو دو کے جیکو پین لینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

پھر خطی ایہم متغیر ہیں جنکو اس طرح لکھا جاسکتا ہے:-

$ہ$  (و)  $ہ$  (گ)  $ہ$  (ع)  $ہ$  (ک)  $ہ$  (ج)  $ہ$  (ا) اور

$ہ$  (و)

یہ آسانی کے ساتھ دیکھا جاسکتا ہے کہ  $ہ$  (ع) اور  $ہ$  (گ)  
 متماثل معدوم ہوتے ہیں کیونکہ  $ع$  اور  $گ$  کو خطی استحالہ کے ذریعہ  
 علی الترتیب اشکال  $ا$   $ب$  +  $د$   $ا$  اور  $ا$   $د$  (و  $ا$   $ب$  +  $د$   $ا$ ) میں اور  
 $ہ$   $ا$   $ب$   $د$   $ا$   $م$  میں لایا جاسکتا ہے۔ (دفعہ ۱۸۰)  
 اس نظام کے کل سات غیر متغیر ہیں جنہیں سے پانچ  $ل$   $م$   $ن$   
 +  $و$  کا مینر بنا کر حاصل کئے جاسکتے ہیں،  $ل$   $م$   $ن$  کی مختلف  
 قوتوں کے سر غیر متغیر ہیں۔ اگر یہ مینر

$ل$   $م$  +  $ن$   $ل$   $م$  +  $ا$   $ب$  +  $ل$   $م$  +  $ا$   $د$  +  $ل$   $م$  +  $ا$   $ب$  +  $ل$   $م$  +  $ا$   $د$

ہے تو ہمیں اس طور پر تین خاص غیر متغیر  $ط$   $ا$   $ب$   $ا$   $د$  حاصل ہوتے ہیں  
 ابتدائی اور آخری سر  $ع$  اور  $و$  کے مینر ہیں۔ بقیہ دو غیر متغیر

ہر کعبی کے سروں میں طاقی رتبوں کے ہیں۔ انکوف اور ق سے تعبیر کیا جاتا ہے اور انہی تعریف اس طرح ہو سکتی ہے:-

$$ف = \frac{1}{4} ع (و) = (د) - ۲ (بج) (۱)$$

$$۲ ق = ف - ۳ (۲)$$

جہاں ع اور و کا حاصل ۳ ہے جو بیرو کے طریقہ سے حاصل ہوا ہے (دفعہ ۱۵۵) یعنی

$$۳ = (د) - ۱۸ (ب) (ج) (د) + ۹ (ب) (د) (ج) (د) (د)$$

$$+ ۲۴ (ج) (د) (ج) (د) + ۲۴ (ب) (د) (ب) (ج) (د) (ج) (د)$$

اب ۳ کی قیمت (۲) میں درج کرنے سے

$$ق = (بج) + (ج) (د) + (ب) (د) - (بج) (د) (د)$$

۳ - (ب) (ج) (د) - (د) (د) - (ب) (د) (ج) (د) -  
(۱۶۲) کوئی غیر متغیر جو ضابطہ ل ف + م ۳ میں شامل ہو (جہاں ل اور م اعداد ہیں) نمونہ ع کا ہونے کی وجہ سے ق کی بجائے اس نمونہ کے بنیادی غیر متغیر کے طور پر انتخاب کیا جاسکتا تھا لیکن اس کو منتخب

کرنیکے اسباب اُمنہ ظاہر ہو جائینگے (دیکھو مثال ۴ صفحہ ۲۶۲) -  
تھیں کردہ خاص شکلوں کے ساتھ وہ اشکال بھی اگر شمار کجائیں جو ہر کعبی سے متعلق ہیں تو کل چوبیس بنیادی شکلیں ملتی ہیں یعنی ایک چار درجہ، چہ کعبی، چہ دو درجہ، چہ خطی اہم متغیر اور سات غیر متغیر۔  
دفعات مابقی میں تھیں کردہ ہم متغیروں اور غیر متغیروں میں سے بعض، اشلہ ذیل میں مجتمع نظام کی اولوں سرایتوں کی اصولوں کی رسوم میں بیان ہوئے ہیں۔

۱۹۳۔ اجتماعے۔ ایک ہی درجہ کی مجتمع شکلوں سے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کا ایک سلسلہ پیدا ہوتا ہے جنکے سر شکل (۱۔ بس) کے مقطعوں سے بیان ہو سکتے ہیں، یہ مقطعات ایسے ہیں جیسے اس حاصل استقاط میں واقع ہوتے ہیں جو پیرو کے طریقہ سے حاصل کیا جاتا ہے (دفعہ ۱۵۵)۔ یہ ہم رو ہیں بدلتے جبکہ ع + و کو ل + ع + مہ + و + ل + ع + مہ + و میں تبدیل کیا جاتا ہے، صرف ایک جزو ضروری بدلتا ہے جو شکل (ل + مہ + ل + مہ) سے ہوتا ہے۔ اس قسم کے غیر متغیروں کو ہم اجتماعے کہتے۔ متناظر ہم متغیروں کو اسی طرح اجتماعی ہم متغیر کہا جاسکتا ہے۔ قبل الذکر کی مثالیں دفعہ ۱۹۲ کے ف اور ق ہیں اور ایسی شکلوں کے جیکو بین ثانی الذکر جماعت کے ہر رُوں کی مثالیں ہیں۔

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ دفعہ سابق میں لہ : مہ میں جو چار درجہ ہیں یعنی جو ل + ع + مہ کا مینر ہے اسکے غیر متغیر ع اور حے دو کعبیونچ نظام کے اجتماعے ہیں۔ کیونکہ لہ اور مہ کا خطی استعمال دراصل ع اور و کے اس قسم کے استعمال کے معادل ہے جو اس دفعہ میں زیر بحث رہا ہے اور اس لئے غیر متغیروں  $\Delta$ ،  $\Gamma$ ،  $\Phi$  وغیرہ کا کوئی تفاعل جو اس قسم کے استعمال سے نہیں بدلتا اجتماعیہ ہونا چاہئے۔ اس کی تصدیق ہو سکتی ہے کہ یہ غیر متغیر، ف اور ق کی رقوم میں حسب ذیل طریقہ پر بیان ہو سکتے ہیں (دیکھو سامن کا ہائر الجبرادفعہ ۲۱۸) :-

$$ع = ۳ف (ف - ۲۲ق)$$

$$ج = - فا + ۳۶ف - ۲۱۲ق$$

## مثالیں

۱۔ اگر ساداتوں

$$۶ \equiv ۱ لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د = ۰ \quad ۷ \equiv ۱ لا + ۲ ب لا + ج = ۰$$

کی اصلیں ۶، ۷ اور ۸، یہ ہوں تو تفاعل

$$(ب - ج) (ج - د) (د - ۱) + (ج - د) (د - ۱) (۱ - ب) + (ب - ج) (ج - د) (د - ۱)$$

$$+ (ب - ج) (ج - د) (د - ۱) + (ج - د) (د - ۱) (۱ - ب)$$

کو سروں کی رقوم میں بیان کرو۔

اس تفاعل کو نہ سے تغیر کرو تو آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے

$$- ۱ لا + ۹ = ۰ \quad (۱ - ب) (ب - ج) (ج - د) + (ب - ج) (ج - د) (د - ۱) + (ج - د) (د - ۱) (۱ - ب)$$

اصلوں کا دیا ہوا تفاعل نظام کا ایک غیر متغیر ہے کیونکہ اس میں

کبھی کی سب اصلیں دوسرے درجہ میں اور دو درجہ کی سب اصلیں

پہلے درجہ میں شامل ہوتی ہیں۔ اگر ہم دفعہ ۱۶۶ کے ابدالات عمل میں

لائیں اور تفاعل کو صحیح بنانے کے لئے ۹ اور ۷ سے ضرب دیں تو

نتیجہ میں لا داخل نہیں ہوگا اور اس لئے وہ ایک غیر متغیر ہے (دفعہ ۱۹۱)۔

سادات ۶ = ۰ کی ہندی تغیر ہے کہ دو درجہ کی ۷ کو ۶ کے حصیوں کے

ساتھ ملکر ایک موسیقی نظام بنانا چاہئے۔

۲۔ پہلی مثال کی ترقیم استعمال کر کے وہ شرط معلوم کر دو کہ ۶ = ۰

کی اصلیں ۷ = ۰ کی اصلوں کے ساتھ ایک موسیقی سمت بنائیں۔

جواب :- ۷ + ۹ (ج - ب) = ۰

۱۲

۳۔ اگر کبھیوں

$$۶ \equiv ۱ لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د = ۰ \quad ۷ \equiv ۱ لا + ۲ ب لا + ج لا + د = ۰$$

$$۶ \equiv ۱ لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د = ۰ \quad ۷ \equiv ۱ لا + ۲ ب لا + ج لا + د = ۰$$

کی اصلیں عہ، یہ، جہ اور عہ، یہ، جہ ہوں تو حسب ذیل تفاعل کو  
(جب اسکو دائرے سے ضرب دیا جائے) سروں کی رقوم میں بیان کرو  
اور ثابت کرو کہ وہ اس نظام کا ایک غیر متغیر ہے:-

$$\begin{aligned} & (عہ - عہ) + (یہ - یہ) + (جہ - جہ) + (عہ - عہ) + (یہ - یہ) + (جہ - جہ) \\ & + (عہ - عہ) + (یہ - یہ) + (جہ - جہ) + (عہ - عہ) + (یہ - یہ) + (جہ - جہ) \\ & + (عہ - عہ) + (یہ - یہ) + (جہ - جہ) + (عہ - عہ) + (یہ - یہ) + (جہ - جہ) \end{aligned}$$

جواب:- ۳ ف جہاں ف = (دو - دو) ۳ (بج)

۴۔ پہلی مثال کی ترقیم کو قائم رکھ کر ثابت کرو کہ اگر ک معلوم  
ہو سکے ایسا کہ ع + ک = ایک کامل کتب ہو جائے تو دونوں  
کعبیوں کی اصلوں کے درمیان حسب ذیل ربط موجود ہوتا ہے:-

$$(بہ - جہ) + (عہ - عہ) + (عہ - عہ) + (یہ - یہ) + (عہ - عہ) + (یہ - یہ) =$$

جہاں ف (لا) = و اور عہ، یہ، جہ مساوات ع = کی اصلیں ہیں۔ ثابت کرو کہ  
اس صورت میں غیر متغیر (دفعہ ۱۹۲) معدوم ہوتا ہے۔

اصلوں کے درمیان مندرجہ بالا ربط فوراً حاصل ہو جاتا ہے اگر  
متبادل ع + ک = و (ل لا + م) میں لا کی بجائے ع، یہ، جہ درج  
کیا جائے اور محصلہ مساواتوں سے ک، ل، م کو ساقط کیا جائے۔

منطق بنانے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \begin{aligned} & (بہ - جہ) + (عہ - عہ) + (عہ - عہ) + (یہ - یہ) + (عہ - عہ) + (یہ - یہ) \\ & + (عہ - عہ) + (یہ - یہ) + (جہ - جہ) + (عہ - عہ) + (یہ - یہ) + (جہ - جہ) \end{aligned} \right\} =$$

فہ (عہ - عہ) + (یہ - یہ) + (جہ - جہ) کی بجائے اندراجات کرو اور وہ روابط داخل کرو





لہ  $ع + م$  و (دفعہ ۱۹۲) کا عیسوی تھا، مثلاً معدوم ہونا چاہئے کیونکہ یہ شرط پوری ہوتی ہے جبکہ لہ  $ع + م$  و ایک کامل مکعب ہو۔

آخر الامر، مساوات (۲) کو اس شکل

$$\frac{۱ + ک + ب}{۱ + ک + ب} = \frac{ب + ک + ج}{ب + ک + ج} = \frac{ج + ک + د}{ج + ک + د}$$

میں کھینے اور ک کے کو ساقط کرنے سے ق کے لئے ایک تیسری شکل ملتی ہے یعنی

$$ق = \begin{vmatrix} (۱ + ب) & (۱ + ج) & (ب + ج) \\ (۱ + ج) & (۱ + د) & (ب + د) \\ (ب + د) & (ب + ج) & (ج + د) \end{vmatrix}$$

اس شکل میں اجزائے ترکیبی وہی صغیر مقطعات ہیں جو بیرو کے طریقہ سے حاصل انتظام معلوم کرنے میں واقع ہوتے ہیں، اور اس کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کہ ق کی یہ قیمت دفعہ ۱۹۲ میں درج کردہ پھیلائی ہوئی شکل کے مطابق ہے۔

۵۔ وہ شرط معلوم کرو کہ دو کعبیوں کی اصلوں سے ایک دیہی نظام متعین ہو۔  
نمونہ

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ + ع + ح & ۱ + ح + ع \\ ۱ & ۱ + ب + ج & ۱ + ج + ب \\ ۱ & ۱ + ج + ب & ۱ + ب + ج \end{vmatrix}$$

کے چہرہ مقطعات کے حاصل ضرب کو صفر کے مساوی رکھنے سے مطلوبہ شرط اصلوں کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے۔

۶۔ مثال مابوق کی شرط کو کعبیوں کے سروں کی رقوم میں بیان کرو۔  
چونکہ ایک کعبی کی اصلیں دوسرے کعبی کی اصلوں کی مزدوج ہیں یہ دونوں کعبی اشکال ذیل میں تخیل ہو سکتے ہیں:-

$$\begin{aligned} ۶ &= ۱ لا^۲ + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د \\ ۷ &= ۱ د لا^۲ + ۳ ک ج لا + ۳ ک ب لا + ک^۳ ۱ \\ \text{اور غہ } ۶ + ۷ &\text{ کے مینہ کو عام شکل (دفعہ ۱۹۲)} \end{aligned}$$

$$\text{غہ } ۴ = \Delta + ۲ \text{ غہ } ۲ + \text{طا} + ۱ \text{ غہ } ۲ + \text{فا} + ۲ \text{ غہ } \text{طا} + \Delta$$

میں لکھتے سے ہمیں اس صورت میں حاصل ہوتا ہے  
 $\text{طا} = \text{ک}^۲ \text{ طا} = \Delta = \text{ک}^۲ \Delta$

اسلئے مطلوبہ شرط ہے

$$\Delta - \text{طا} = \Delta - \text{طا} = ۰$$

۷۔ مثال ۳ کے کعبیوں کے سروں کی رقوم میں اس نظام کے  
 حسب ذیل ہم متغیر کو بیان کرو:-

$$\begin{aligned} ۱ \text{ لا}^۲ &= \{ ۳ (ب-ب) (ج-ج) + ۳ (ب-ب) (ج-ج) \} \\ &+ \{ (ب-ب) (ج-ج) (ج-ج) \} + \{ (لا-لا) (لا-لا) (لا-لا) \} \\ \text{جواب :- } ۱۸ &= \{ (۱ ج + ۲ ج - ۲ ب) (۱ ج + ۲ ج - ۲ ب) (۱ ج + ۲ ج - ۲ ب) \} \\ &+ \{ (۱ ج + ۲ ج - ۲ ب) (۱ ج + ۲ ج - ۲ ب) (۱ ج + ۲ ج - ۲ ب) \} \end{aligned}$$

۸۔ کعبیوں

$$۶ = (۱ ب' ج' د') (لا' ما') ۳ = (۱ ب' ج' د') (لا' ما') ۳$$

کوشکلوں

$$۶ = \frac{۱}{۳} \text{ جف ف} = ۷ = \frac{۱}{۳} \text{ جف ف}$$

میں ایک ایسے خطی استمال کے ذریعہ تحویل کرو جس کے سروئے ہوئے  
 کعبیوں کے سروں کی رقوم میں معلوم ہوں۔

$$\text{فرض کرو :- } \text{ف} = (۱ ب' ج' د') (لا' ما') ۳ = (۱ ب' ج' د') (لا' ما') ۳$$

$$۶ = (۱ ب' ج' د') (لا' ما') ۳ = (۱ ب' ج' د') (لا' ما') ۳$$

$$۷ = (۱ ب' ج' د') (لا' ما') ۳ = (۱ ب' ج' د') (لا' ما') ۳$$

(187)

اب ع کی دونوں شکلوں کے صیغوں میں لا اور ما کی بجائے تفرقی علامتیں عفا، عف اور لا اور ما کی بجائے عفا، عف، عفا، عفا درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} \text{عفا} & \text{عفا} & \text{عفا} \\ \text{لا} & \text{ما} & \text{لا} \end{vmatrix} = \frac{1}{\text{ما}} \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

اسلئے وکی دونوں شکلوں پر عمل کرنے سے

$$\text{پہ (لا، ما)} = \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} + \text{لا} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} = \frac{\text{جے}}{\text{ما}}$$

اسی طرح

$$\text{فہ (لا، ما)} = \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} + \text{لا} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} = \frac{\text{جے}}{\text{ما}}$$

جہاں فہ اور پہ ع اور و کے ہم تغیر ہیں اور جے، ف کا تلافی غیر تغیر ہے۔  
پھر چونکہ

$$\text{فہ (عفا، عفا)} = \frac{\text{جے}}{\text{ما}} \text{عفا اور پہ (عفا، عفا)} = \text{پہ (عفا، عفا)}$$

$$\frac{\text{جے}}{\text{ما}} \text{عفا} =$$

اسلئے عمل

$$\text{فہ (عفا، عفا)} = \text{پہ (لا، ما)} + \text{پہ (عفا، عفا)} = \text{فہ (لا، ما)}$$

کی تکمیل معادل شکلوں پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے :-

$$ق = \begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ب & ج & د \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix}$$

اب ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ ع اور و مطلوبہ شکلوں میں تحویل کئے جاسکتے ہیں :-

کیونکہ پہلی مساداتوں سے

$$ق = \begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ب & ج & د \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix}$$

$$ق = \begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ب & ج & د \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \\ ا & ب & ج \end{vmatrix}$$

$$پ = ل + م + ن ، ف = ل + م + ن$$

(168)

اگر اس ابدال کی وجہ سے

$$ق = (ا' ب' ج' د') (ا' ب' ج' د') - (ا' ب' ج' د') (ا' ب' ج' د') = (ا' ب' ج' د') (ا' ب' ج' د')$$

ہو تو

$$ل = ا + ب + ج + د - ا - ب - ج - د = ۰$$

$$ب = ا + ب + ج + د - ا - ب - ج - د = ۰$$

$$م = (ب' ل' د' م') + (ب' ل' د' م') - (ب' ل' د' م') - (ب' ل' د' م') = ۰$$

اب اگر خداوند فرماید عیسوی ه او را علی بن ابی طالب

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = 1$$

## کے مساوی ہیں۔

اِنَّ = اِنْ + عَدْ + بَ + يَ + جَوْ      'فَرْ = بَ + عَدْ + نَ + يَ + وَجَوْ .

میں اور مائے متشابہ قیمتوں کے۔ پر

**جملہ**۔ دُوم = اوجھ = ڈم۔ بیل، قال۔ سَم = جوع = یام۔ عِل  
دل۔ ق م = لیبے = حج م۔ دل۔

پس ب = م : (ج) - ۲۲ ل (ج) + ل (ع) =  $\frac{1}{4}$  پ ج (ھ) (ھ)

نیز بک =  $\frac{1}{4}$  پیغف ع

ج = م م (او م - ب ل) + م ل (ع ل - ب م) + م ل (ع ل - ب م)  
 + ل ل (ع م - و ل)  
 = م م (و ج) + (م ل + م ل) (ج ع) - ل ل (ع ب)

==  $\frac{1}{2}$  پیمف نصف ہے (۵'۵)

نیرج =  $\frac{1}{4}$  عفت عفت ع

$$د = م' (ج) - ۲ م ل (ج) + ل (ع) = \frac{1}{4} ن (ع) ج (ه)$$

نیزد =  $\frac{1}{4}$  فاع

اسی طرح

ج = م (ج) - ۲ م (ج) + ل (ع) = ب  
ج = م (ج) + (م + ل) (ج) - ل (ع) = ج

$$ج = م^2 (ب ج) - ۲ م ل (ب ج ع) + ل (ع ب) = د$$

$$د = - \frac{۱}{۴} ف^۲ و$$

اسلئے اگر

$$ا = ق^۲ ا ب = ا = ق^۲ ا ب ج = ب = ق^۲ ج = ق^۲ ج$$

$$د = ج = ق^۲ د = د = ق^۲ ص$$

$$ف = (ا ب ج د ص) (ف ب پ)$$

لکھا جائے تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ع = \frac{۱}{۴} ج ف = و = \frac{۱}{۴} ج ف$$

اور ہم دیکھتے ہیں کہ 'ا' ب ج د ص غیر متغیر ہیں جیسا کہ ہونا چاہئے۔  
۹۔ پہلی شال میں ف کے غیر متغیر معلوم کرد اور اسلئے دو کیبلوں کے حاصل کی شکل کا استخراج کرو۔  
شال ۸ کی مساواتوں سے

$$ق = ج = \frac{۱}{۴} م = (ا ل) = ق$$

اور لا، ما اور فہ 'پ' کی بجائے و کی دونوں شکلوں میں تفرقی علاقے درج کرنے اور ع پر عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ف = د - د - ۲ (ب ج - ب ج) = \frac{ع}{۴} = \frac{ع}{۴}$$

اسلئے

$$ج = ق = ق = ع = ف ق$$

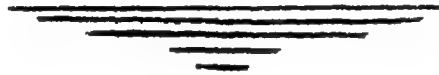
$$ع - ۲ ج = ۱ ج = ق (ف - ۲ ق)$$







(۱)  $\{۱(ب) ۲(د) ۳(و) ۴(ج)\}$   
 جسکو شکل ۲  $\{۱(ف) ۲(ا) ۳(ج) ۴(ب)\}$  میں لکھا جاسکتا ہے چنانچہ  
 'ا' 'ب' 'ج' 'د' جیکوین کے پہلے تین سر ہیں۔ اسلئے دیا ہوا ہم متغیر شکل  
 ذیل میں بیان ہو سکتا ہے:-  
 ۱  $\{۱(و) ۲(ف) ۳(ج) ۴(و) ۵(ع) ۶(ا) ۷(و) ۸(ع) ۹(و) ۱۰(ع) ۱۱(و) ۱۲(ع)\}$   
 ۱۶۔ ف اور ق کی رقوم میں دو کمیوں کے جیکوئی کے غیر متغیر ذکو  
 بیان کرو۔  
 جواب:- ۱۲  $\{۱(ع) ۲(ف) ۳(ا) ۴(و) ۵(ع) ۶(ا) ۷(و) ۸(ع) ۹(و) ۱۰(ع) ۱۱(و) ۱۲(ع)\}$



# انیسواں باب

## استحالات

### فصل ۱۔ چرن ہاوزن کا استحالہ

۱۹۴۔ اس باب کی عام سرخی کے تحت مختلف مسائل کا جمع کرنا مقصود ہے۔ یہ مسئلے کسی اور جگہ سہولت کے ساتھ بیان نہیں کئے جاسکتے تھے۔ صفحات اسبق میں جن مضامین پر بحث ہوئی ہے اُنکے سلسلہ میں یہ مسائل اہم ہیں۔ ہم ایک عام مسئلہ سے شروع کرتے ہیں جس کا تعلق منطق استحالات سے ہے۔

مسئلہ۔ ن ویں درجہ کی مساوات کی ایک اصل کا عام سے عام منطق جبری استحالہ زیادہ سے زیادہ ن۔۱ ویں درجہ کے ایک اصحیح استحالہ میں تحویل ہو سکتا ہے۔

کیونکہ مساوات ف (لا) =۔ کی ایک اصل عدد کا منطق متغیر اس شکل

خا (عہر)

یا (عہر)

کا ہوتا ہے جہاں خا اور یا اصحیح تفاعل ہیں۔ نیز

$$\frac{\text{فا (عر)} = \text{خا (عر)} \cdot \text{پا (عم)} \dots \text{پا (عج)} \cdot \text{پا (عر)} \dots \text{پا (عن)}}{\text{پا (عر)} \cdot \text{پا (عم)} \dots \text{پا (عج)} \dots \text{پا (عر)} \dots \text{پا (عن)}}$$

نسب فا پا (عم) پا (عج) ... پا (عن) چونکہ ف (لا) = . کی اصلوں کا ایک متشاکل تفاعل ہے اسلئے وہ سروں کے ایک منطق تفاعل کے طور پر بیان ہو سکتا ہے۔ اسلئے  $\frac{\text{فا (عر)}}{\text{پا (عر)}}$  ایک صحیح شکل میں تحویل ہو جاتا ہے۔

مزید بریں پہلی کسر کا شمار کنندہ مساوات  $\frac{\text{ف (لا)}}{\text{لا - عر}} = .$  کی اصلوں کا ایک متشاکل تفاعل ہے اور اسلئے اس مساوات کے سروں کے ایک منطق تفاعل کے طور پر بیان ہو سکتا ہے یعنی عر اور ف (لا) کے سروں کی رقوم ہیں۔

اب  $\frac{\text{فا (عر)}}{\text{پا (عر)}}$  کی اس صحیح شکل کو ف (عر) سے تعبیر کرو تو عمل تقسیم سے

$\text{ف (عر)} = \text{ق ف (عر)} + \text{فہ (عر)} = \text{فہ (عر)}$  جہاں فہ (عر) درجہ ن۔ اسے تجاوز نہیں کر سکتا۔ اسلئے مسئلہ ثابت ہے دو درجہ اور کعبی کی مخصوص صورتوں میں یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اصل کا عام سے عام منطق تفاعل علی الترتیب اس اصل کے ایک خطی تفاعل اور ایک دو درجہ تفاعل میں تحویل ہو سکتا ہے۔ کعبی کی صورت میں یہ دو درجہ تفاعل دوسری شکل میں بھی تحویل ہو سکتا ہے جو اکثر فائدہ مند ہے، مثلاً حسب ذیل طریقہ پر :- اس دو درجہ تفاعل کو پا (طہ) سے تعبیر کرو اور کعبی ف (طہ) کو پا (طہ) سے تقسیم کرو تو



$$ق_1 + ق_2 + ق_3 + \dots + ق_n = ق$$

$$ق_1 + ق_2 + ق_3 + \dots + ق_n = ق$$

.....

$$ق_1 - ق_2 + ق_3 - ق_4 + \dots + ق_n - ق_{n-1} = ق$$

کا نظام حاصل کر سکتے ہیں جہاں  $ق_1, ق_2, ق_3, \dots, ق_n$  سب کے سب

عم، عم، عم، ...، عم کے متشاکل تفاعل ہیں

ان مساداتوں کو حل کرنے سے ہم فوراً  $ق_1, ق_2, ق_3, \dots, ق_n$  چنی

کے ایک متشاکل تفاعل کی شکل میں بیان ہو جائے گا کیونکہ ہر چہ  $ق_1, ق_2, ق_3, \dots, ق_n$

کا کوئی بھی تبادلہ ہم کی قیمت کو نہیں بدلتا اس وجہ سے کہ وہ قدرتی

....،  $ق_1$  کے ایک باہمی تبادلہ کے معادل ہے۔ اس لئے قیمت

ہر پر کے مسئلہ کو رو سے  $ق$  کے ایک منقطع مجموعہ تفاعل میں تحویں ہو سکتی

ہے جسکا درجہ  $ق$  - ۱ ہے کیونکہ یہ  $ق$  کی صرف  $ق$  قیمتیں ہیں جب سکو

عم، عم، عم، ...، عم کا تفاعل سمجھا جاتا ہے۔ اب خاص صورتوں

پر غور کرنے سے جسکا حوالہ ادیہ دریا گیا ہے (۱) جب  $ق = ۲$  اور

لنا = ۳ تو یہ ثابت ہوا ہے کہ  $ق$  اور یہ کو ایک خطی رشتہ عم، عم، عم

کے متشاکل تفاعلوں کی رقوم میں مروجہ کر لیا ہے اور (۲) جب  $ق = ۳$  اور

لنا = ۴ تو اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ  $ق$  اور یہ کو ایک منقطع رشتہ

مربوط کتاب (دیکھو) مثلاً ۵، ۶، ۷ صفحہ ۱ جلد اول، مثال ۲ صفحہ ۱۶۹ جلد دوم

۱۹۵۔ استحالہ شدہ مساوات کی ساخت۔ دفعہ سابق میں جس

استعمال کی تو فیج کنگنی ہے اسکو سب سے پہلے چرن ہاوزن نے کعبی اور چار درجہ کی تحول کے لئے استعمال کیا تھا۔ ہم عام صورت میں وہ مساوات بنا سکتے ہیں جہاں اعلیٰ نہ (عہ) نہ (عہ) نہ (عہ) نہ (عہ) ... نہ (عن) ہوں جہاں نہ (لا) ان - اویں درجہ کا لاکتا فعل

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} - \frac{1}{2048} + \frac{1}{4096} - \frac{1}{8192} + \frac{1}{16384} - \frac{1}{32768} + \frac{1}{65536} - \frac{1}{131072} + \frac{1}{262144} - \frac{1}{524288} + \frac{1}{1048576} - \frac{1}{2097152} + \frac{1}{4194304} - \frac{1}{8388608} + \frac{1}{16777216} - \frac{1}{33554432} + \frac{1}{67108864} - \frac{1}{134217728} + \frac{1}{268435456} - \frac{1}{536870912} + \frac{1}{1073741824} - \frac{1}{2147483648} + \frac{1}{4294967296} - \frac{1}{8589934592} + \frac{1}{17179869184} - \frac{1}{34359738368} + \frac{1}{68719476736} - \frac{1}{137438953472} + \frac{1}{274877906944} - \frac{1}{549755813888} + \frac{1}{1099511627776} - \frac{1}{2199023255552} + \frac{1}{4398046511104} - \frac{1}{8796093022208} + \frac{1}{17592186044416} - \frac{1}{35184372088832} + \frac{1}{70368744177664} - \frac{1}{140737488355328} + \frac{1}{281474976710656} - \frac{1}{562949953421312} + \frac{1}{1125899906842624} - \frac{1}{2251799813685248} + \frac{1}{4503599627370496} - \frac{1}{9007199254740992} + \frac{1}{18014398509481984} - \frac{1}{36028797018963968} + \frac{1}{72057594037927936} - \frac{1}{144115188075855872} + \frac{1}{288230376151711744} - \frac{1}{576460752303423488} + \frac{1}{1152921504606846976} - \frac{1}{2305843009213693952} + \frac{1}{4611686018427387904} - \frac{1}{9223372036854775808} + \frac{1}{18446744073709551616} - \frac{1}{36893488147419103232} + \frac{1}{73786976294838206464} - \frac{1}{147573952589676412928} + \frac{1}{295147905179352825856} - \frac{1}{590295810358705651712} + \frac{1}{1180591620717411303424} - \frac{1}{2361183241434822606848} + \frac{1}{4722366482869645213696} - \frac{1}{9444732965739290427392} + \frac{1}{18889465931478580854784} - \frac{1}{37778931862957161709568} + \frac{1}{75557863725914323419136} - \frac{1}{151115727451828646838272} + \frac{1}{302231454903657293676544} - \frac{1}{604462909807314587353088} + \frac{1}{1208925819614629174706176} - \frac{1}{2417851639229258349412352} + \frac{1}{4835703278458516698824704} - \frac{1}{9671406556917033397649408} + \frac{1}{19342813113834066795298816} - \frac{1}{38685626227668133590597632} + \frac{1}{77371252455336267181195264} - \frac{1}{154742504910672534362390528} + \frac{1}{309485009821345068724781056} - \frac{1}{618970019642690137449562112} + \frac{1}{1237940039285380274899124224} - \frac{1}{2475880078570760549798248448} + \frac{1}{4951760157141521099596496896} - \frac{1}{9903520314283042199192993792} + \frac{1}{19807040628566084398385987584} - \frac{1}{39614081257132168796771975168} + \frac{1}{79228162514264337593543950336} - \frac{1}{158456325028528675187087900672} + \frac{1}{316912650057057350374175801344} - \frac{1}{633825300114114700748351602688} + \frac{1}{1267650600228229401496703205376} - \frac{1}{2535301200456458802993406410752} + \frac{1}{5070602400912917605986812821504} - \frac{1}{10141204801825835211973625643008} + \frac{1}{20282409603651670423947251286016} - \frac{1}{40564819207303340847894502572032} + \frac{1}{81129638414606681695789005144064} - \frac{1}{162259276829213363391578010288128} + \frac{1}{324518553658426726783156020576256} - \frac{1}{649037107316853453566312041152512} + \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} - \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} + \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} - \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} + \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} - \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} + \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} - \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} + \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} - \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} + \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} - \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} + \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} - \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} + \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} - \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} + \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} - \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} + \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} - \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} + \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} - \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} + \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} - \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} + \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} - \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} + \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} - \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} + \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} - \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} + \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} - \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} + \frac{1}{55751862996$$

$$س = ن ب + ب س + س ب + س ب + ... + س ب + س ب$$

$$س = ن ل + ل س + س ل + س ل + ... + س ل + س ل$$

جہاں 'س'، 'س'، 'س' وغیرہ مطلوبہ مساوات کی اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

$$اب س، س، س، س، ...، س، کوف (لا) کے سروں کی$$

رقوم میں بیان کرنے سے فہ (لا) اور ف (لا) کی رقوم میں 'س'، 'س'، 'س'، 'س'، ...، 'س' متعین ہو جاتے ہیں۔

نیز ہم دفعہ ۸ کی مدد سے اُس مساوات کے سروں کو جسکی اصلیں

$$فہ (عم)، فہ (عم)، ...، فہ (عم) ہیں 'س'، 'س'، 'س'، ...، 'س'،$$

کی رقوم میں اور اسلئے آخر الام فہ (لا) اور فہ (لا) کے سروں کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔ اس طرح نظری طور پر استحالہ کی تکمیل ہو جاتی ہے۔

۱۹۶۔ استحالہ مساوات بنانیکا دو سہ طریقہ۔ عمل استقاط کے

ذریعہ فہ میں اس آخری مساوات کو معلوم کرنیکا ایک اور طریقہ ہے جسکو اب ہم بیان کرتے ہیں۔ چونکہ

$$فہ + فہ + فہ + فہ + ... + فہ + فہ = فہ$$

اسلئے اگر اس مساوات کو لا، لا، ...، لا سے ضرب دیا جائے اور مساوات







۱۹۸۔ چار درجہ پر چرن ہاؤزن کے استحالة کا استعمال۔  
اس صورت میں ہم استحالة شدہ کعبی کو بالراست بنانے کی کوشش نہیں کرتے بلکہ ذیل کا مسئلہ ثابت کرتے ہیں جس سے یہ معلوم ہو گا کہ یہ استحالة کس طرح وہ اور استحالات میں تحلیل کیا جاسکتا ہے:-

مسئلہ۔ چرن ہاؤزن کا استحالة چار درجہ ع کو ایسے چار درجہ میں بدلتا ہے جسکے غیر متغیری ہوتے ہیں جو ل + ع + م + ہ کے ہیں اور اسلئے وہ موخر الذکر شکل میں خطی استحالة کے ذریعہ تحویل ہو سکتا ہے۔  
اسکو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ چار درجہ

$$ل + ب + ل + ب + ل + ب + ل + ب = ۰$$

کو ابدال

$$ل + ب + ل + ب + ل + ب + ل + ب = ۰$$

مستعمل کیا گیا ہے۔  
اگر چار درجہ کی اصلیں ل، ل، ل، ل، ل، ل، ل، ل ہوں اور انکے جواب میں م کی قیمتیں م، م، م، م، م، م، م، م تو

$$\frac{ل - م}{ل - ل} = \frac{ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل}{ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل}$$

$$\frac{ل - م}{ل - ل} = \frac{ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل}{ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل}$$

(۱)

ان مساواتوں سے اب ہم یہ دکھائی گئے کہ

$$\frac{(م - م) (م - م)}{(ل - ل) (ل - ل)} = ف + ق (ل + ل + ل + ل)$$
 جہاں ف اور ق میں چار درجہ کی اصلیں متشاکلا واقع ہوتی ہیں۔  
 اول تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(ل + ل + ل + ل) (ل + ل + ل + ل) = ب - ب + ب + ب - ب ل$$
 جہاں لہ حسب معمول قیمت ل + ل + ل + ل رکھتا ہے۔ اور دوسرے چونکہ  

$$ل + ل + ل + ل = (ل + ل) - ل ل$$
 وغیرہ  
 اسلئے پھر ہمیں حاصل ہوتا ہے :-

$$(ل + ل) (ل + ل + ل + ل) + (ل + ل) (ل + ل + ل + ل) = ب - ب + ب + ب ل$$
 بالآخر چونکہ حاصل ضرب میں دوسری ارقام صریحاً اسی شکل کی ہیں جو  
 ف + ق لہ کی ہے اس لئے ہم نے ثابت کر دیا کہ  

$$\frac{(م - م) (م - م)}{(ل - ل) (ل - ل)} = ف + ق (ل + ل + ل + ل)$$
 جس سے

$$(م - م) (م - م) = (ن - ن) (ف + ق ل)$$
 اب لہ 'نہ' کی جگہ 'غہ' 'غہ' 'غہ' داخل کرنے سے یہ مساوات

اور اسکی جیسی مساواتیں اپنی شکلیں برقرار رکھتی ہیں۔ پس ف اور ق کو متشابه مقداروں میں بدلنے سے ہمیں ذیل کی مساواتیں ملتی ہیں :-

$$(پ - پ) (پ - پ) = ۴ (غ - غ) (ف - ق غ)$$

$$(پ - پ) (پ - پ) = ۴ (غ - غ) (ف - ق غ)$$

$$(پ - پ) (پ - پ) = ۴ (غ - غ) (ف - ق غ)$$

اور ان سے استحالات چار درجہ کے غیر متغیر فوراً حاصل ہوتے ہیں اور انکی قیمتوں کا مقابلہ ک ۶۔ لہ ۴ کے غیر متغیروں کے ساتھ کرنے سے

جو دفعہ ۱۸۷ میں دئے گئے ہیں مسئلہ بالافور ثابت ہو جاتا ہے۔

۱۹۹۔ چرن ہاؤزن کے استحالات سے کبھی کو ثنائی شکل میں

تحويل کرنا۔ فرض کرو کہ کبھی

$$۱ + ۳ ب + ۳ ج + ۳ لا + د$$

کو شکل ۳۔ و میں استحالات

$$۱ = ق + ف + لا + لا$$

کے ذریعہ تحويل کیا گیا ہے۔

(78)

اگر دئے ہوئے کبھی کی اصلیں لا، لہ، لام ہوں اور استحالات شدہ

کبھی کی ایک اصل ما تو ف اور ق کو متعین کر نیچے لے حسب ذیل

مساواتیں ملتی ہیں :-

$$۱ + ۳ ف + لا + ق = ما$$

$$۱ + ۳ ف + لا + ق = ما$$

$$۱ + ۳ ف + لا + ق = ما$$

ان سے

$$ف = \frac{لا^۱ + سه لا^۱ + سه لا^۲}{لا^۱ + سه لا^۱ + سه لا^۲} ، ق = \frac{۱}{۳} (س + ف + س)$$

ف کی اس قیمت میں لا + لا + لا جمع کرنے سے

$$ف + لا + لا + لا = \frac{لا^۱ لا^۱ + سه لا^۱ لا^۱ + سه لا^۲ لا^۱}{لا^۱ + سه لا^۱ + سه لا^۲}$$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے (مثال ۲۵ صفحہ ۹، جلد اول) کہ اس استحالة کو مکمل کرنے کے صرف دو طریقے ہیں کیونکہ ف، ق کی قیمتیں آخر الامر کبھی کے عیسوی کے حل پر منحصر ہوتی ہیں۔

۲۰۰۔ چرن ہاوزن کے استحالة سے چار درجہ کو سہ رقمی شکل میں تحویل کرنا۔ فرض کرو کہ چار درجہ

$$۱ لا^۱ + ۲ ب لا^۱ + ۶ ج لا^۱ + ۴ د لا^۱ + ص$$

کو شکل ما + ف + ق میں (جس میں دوسری اور چوتھی ارقام نہیں ہیں) استحالة

$$ما = ق + ف + لا^۱$$

کے ذریعہ تحویل کیا گیا ہے۔

اگر چار درجہ کی اصلیں لا، لا، لا، لا ہوں اور نیز استحالة شدہ چار درجہ کی دو مختلف اصلیں ما، ب ہوں تو ف اور ق کو متعین کرنے کے لئے حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں :-

$$\begin{aligned} لا^۱ + ف لا + ق = ما ، لا^۱ + ف لا + ق = ق + لا + لا = ما \\ لا + ف لا + ق = ق + لا + لا = ما ، لا + ف لا + ق = ق + لا + لا = ما \end{aligned}$$

ان سے

$$ف = \frac{لا_1^2 + لا_2^2 - لا_3^2 - لا_4^2}{لا_1 + لا_2 - لا_3 - لا_4} \quad , \quad ق = \frac{1}{3} (س + ف + س)$$

ف کی اس قیمت میں لا + لا + لا + لا جمع کرنے سے

$$\frac{(u^2 - v^2)^2}{u^2 - v^2 - u + v} = u + v + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + f$$

تفاعل ہے لام، لایہ، .... لان کا۔

(۱) اگر ب معدوم نہ ہو تو  $\equiv$  ب (لا + بی) + ب - بی اور

چونکہ ب - بی میں لا شامل نہیں ہے اسلئے ہم نے مطلوبہ

سوال کو اس پر تبدیل کر دیا ہے کہ (ن - ا) تغیروں کے دو درجہ جی  
تخالف تفاعل کو (ن - ا) عربوں کے مجموعے کی شکل میں ظاہر  
کیا جائے جس کے مستقل ہوں۔

(ب) اگر  $\equiv$  ب - اور ہم لا سے بحث کرنا چاہتے ہیں تو لا اور  
ایک دوسرے تغیر (مثلاً لا) کے حاصل ضرب کا نمبر معدوم نہیں ہونا  
چاہئے ورنہ لا پر منحصر نہیں ہوگا۔ اب دو شکل لا، لام

+ ج لا + ف لا + ق لا + ہ میں لکھو جہاں لا اور ج مستقل

ہیں، ف اور ق، لام، لایہ، .... لان کے خطی تفاعل میں اور ہ انکا

دو درجہ جی تفاعل ہے۔ اسلئے

$$\equiv لا (لا + ج لا) + (لا + ج لا) (ف - ق) - (ج ف - لا + ہ)$$

$$\equiv (لا + ف) (لا + ج لا + ق - ج ف) - (ف - ق) (ج ف - لا + ہ) + ہ$$

$$\equiv لا ما + ما + ہ$$

$$\text{جہاں } ما = لا + ج لا + ق - ج ف، ہ = لا + ف$$

(۱) اور نہ لام، لایہ، .... لان کا ایک دو درجہ جی تفاعل ہے۔





ق۔۔۔ ق۔۔۔ ق۔۔۔

تو مسئلہ حل ہو جائیگا۔ اس مقصد کے لیے ق۔۔۔ سے حصہ کی قیمت اخذ کرو اور اس کی قیمت ق۔۔۔ سے حصہ کی قیمت سے اس کو ساخط کر دو تو نتیجہ یہ ہے کہ یہ حصہ میں ملے گا۔ ترتیب دوسرے اور تیسرے درجوں کی دو مثالیں مساوی میں شامل ہوئی ہیں۔

مثلاً =۔۔۔ مساوی  
اور اوپر کے ثابت شدہ مسئلہ سے ہم۔۔۔ کو حاصل  
۴۔۔۔ ۳۔۔۔ ۲۔۔۔ ۱۔۔۔

میں لگے گئے ہیں جو ۴ = ۳ = ۲ = ۱ کے لئے سے پوری ہوئی ہے۔  
ان مسائل میں اوپر کے حصہ جو ۴ = ۳ = ۲ = ۱ کے لئے سے  
۴ = ۳ = ۲ = ۱ کے لئے سے  
ایک نئی مساوات ملتی ہے جس سے ثابت یہ ہے کہ یہ حصہ میں ملے گا۔  
۴ = ۳ = ۲ = ۱ کے لئے سے  
ایک نئی قیمت دیتے ہیں جو مساوی مقدا میں ملے گی جو ق۔۔۔ میں  
مساویات منتقل

۴۔۔۔ ۳۔۔۔ ۲۔۔۔ ۱۔۔۔

میں تحویل ہوتی ہے۔

اسی طرح مساوی ق۔۔۔ ق۔۔۔ ق۔۔۔ کو دیکھو جہاں ق۔۔۔ کی ایک مساوی  
مل کر کے سے پیدا کیا جاسکتا ہے۔  
یہ نتیجہ پہلے ہی پر سوال کر کے ہم اس کو مساوی شکل

۴۔۔۔ ۳۔۔۔ ۲۔۔۔ ۱۔۔۔

میں سے کسی ایک میں تحویل کر سکتے ہیں یا لا کو۔۔۔ میں یہ لکھنا

لا + ف لا + ق ، لا + ف لا + ق

میں سے کسی ایک شکل میں تحویل کر سکتے ہیں۔

ان تحقیقات میں ہم نے ایم۔ سیٹ ( M. Serret ) کے  
طریق عمل کو اختیار کیا ہے۔ دیکھو اس کی کتاب (Cours d' Algebra  
Superieure جلد اول دفعہ ۱۹۲)۔

## فصل (۲)۔ ہیرمٹ اور سلوسٹر کے مسئلے

۲۰۲۔ دوسرے درجہ کے متجانس تفاعل کو مربعوں کے

مجموعہ کے طور پر بیان کرنا۔ ہم ایک عام طریقہ ہے (دفعہ ۲۰۱)  
پہلے یہ بتا چکے ہیں کہ متغیروں میں دوسرے درجہ کا ایک متجانس تفاعل  
مربعوں کے مجموعہ میں تحویل ہو سکتا ہے لیکن وہاں زیر بحث تفاعل کے  
سروں کی نوعیت کے لحاظ سے کوئی مفروض اختیار نہیں کیا گیا تھا۔ اب ہم  
اس مسئلہ پر غور کریں گے جبکہ تفاعل کے سر سب کے سب حقیقی تصور  
کئے جائیں اور نیز استحالہ شدہ تفاعل میں مربعوں کے سروں کو مقدار اور  
علامت میں معلوم کریں گے۔

فرض کرو کہ ان متغیروں میں دوسرے درجہ کا ایک متجانس تفاعل

ف ( لا ، لا ، لا ، ..... لا ) ہے جس کے مرتام حقیقی ہیں۔

فرض کرو کہ اس تفاعل کو دفعہ ۲۰۱ کے صرف طریقہ (۱) سے ہی اس شکل

ب ( لا + لا + لا + لا + ..... + لا )

+ ب ( لا + لا + لا + لا + ..... + لا )

+ ب ( لا + لا + ..... + لا )







(۱) اور یہ لا انتہا طریقوں سے کیا جاسکتا ہے) تو ہمیں معلوم ہو گا کہ م مضبوط کا مجموعہ شمالاً صفر کے مساوی ہونا چاہئے جو ناممکن ہے۔

۲۰۳۔ ہر مٹ کا مسئلہ۔ دفعہ سابق میں جن اصولوں کو واضح کیا گیا ہے ان کو ہر مٹ نے مساوات ف (لا) = کی ان حقیقی اصولوں کی تعداد معین کرنے میں استعمال کیا ہے جو دئے ہوئے حدود کے اندر واقع ہوتی ہیں۔ اس مقصد کے لئے تفاعل ف کی جس خاص شکل کو وہ استعمال کرتا ہے یہ ہے

$$\frac{1}{\text{عمر} - \text{عہ}} (\text{لا} + \text{عمر لا} + \text{عمر لا}^2 + \dots + \text{عمر}^n - \text{لا}^n)$$

جس میں لا، لا، لا، ...، لا کوئی متغیر ہیں جنکی تعداد مساوات کے درجہ کے مساوی ہے اور ر، ایک سے لیکر ن تک (بشمول ہر دو اعداد) سب قیمتیں اختیار کرتا ہے۔ مساوات کی اصلیں عم، عم، ...، عم ہیں اور غہ کوئی اختیار نہیں ہے۔

(84)

صریحاً یہ شکل مساوات ف (لا) = کی اصلوں کا ایک متشکل تفاعل ہے اور چونکہ اس مساوات کے سروں کا حقیقی ہونا فرض کر لیا گیا ہے اس لئے ف بھی حقیقی ہو گا جب اسکو ان سروں کی اور غہ کی رقوم میں بیان کیا جائے بشرطیکہ تبدیل غہ کو کوئی حقیقی قیمت دیجائے۔ اگر اصلیں عم، عم، ...، عم حقیقی نہیں ہیں تو ف کی مفروضہ شکل ایک حقیقی استحالہ سے حاصل نہیں ہوگی لیکن اس سے جو شکل حاصل ہوگی اُس سے حسب ذیل طریقہ پر دوسری شکل کا اخذ کرنا آسان ہے۔

اگر مزدوج خیالی اصلوں کا ایک زوج عم اور عم ہو تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$\begin{aligned} \text{عہ}_1 &= \text{ر} \cdot (\text{جم} \text{ عہ} + \text{خ جب عہ}) \\ \text{عہ}_2 &= \text{ر} \cdot (\text{جم} \text{ عہ} - \text{خ جب عہ}) \end{aligned}$$

اب  $\text{لا} + \text{عہ} \text{ لا} + \text{عہ} \text{ لا} + \dots + \text{عہ} \text{ لا}$  کو اختصاراً  $\text{ما}$  سے تعبیر کرنے اور ان قیمتوں کو  $\text{ما}$  اور  $\text{ما}$  میں درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ما} = \text{عہ} + \text{خ و} \text{ ما} = \text{عہ} - \text{خ و}$$

جہاں  $\text{عہ}$  اور  $\text{خ و}$  حقیقی ہیں۔ نیز رکھو

$$\frac{1}{\text{عہ} - \text{خ و}} = \text{ر} \cdot (\text{جم} \text{ فہ} + \text{خ جب فہ}) \quad \frac{1}{\text{عہ} + \text{خ و}} = \text{ر} \cdot (\text{جم} \text{ فہ} - \text{خ جب فہ})$$

تو تفاعل  $\text{ف}$  کا وہ حصہ جو  $\text{عہ}$  اور  $\text{عہ}$  پر منحصر ہے یعنی حصہ

$$\frac{\text{ما}}{\text{عہ} - \text{خ و}} + \frac{\text{ما}}{\text{عہ} + \text{خ و}}$$

بدل کر

$$\text{ر} \cdot \left\{ (\text{جم} \text{ فہ} + \text{خ جب فہ}) (\text{عہ} + \text{خ و}) + (\text{جم} \text{ فہ} - \text{خ جب فہ}) (\text{عہ} - \text{خ و}) \right\}$$

ہو جاتا ہے جبکہ دو مربعوں کے فرق کے طور پر یوں

$$2 \cdot (\text{عہ} \text{ جم} \text{ فہ} - \text{خ جب فہ}) - 2 \cdot (\text{عہ} \text{ جب فہ} + \text{خ و جم} \text{ فہ})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ دو مزدوج خیالی اصلوں کی وجہ سے  $\text{ف}$  میں دو حقیقی مربع داخل ہوتے ہیں جنہیں سے ایک کا سر مثبت ہوتا ہے اور دوسرے کا منفی۔

اب ہم ہر سٹ کے مسئلہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں: فرض کرو کہ مساوات

(185)

ف (لا) = (لا - عہ) (لا - عہ) ... (لا - عہ) = کے حقیقی  
ہیں اور اصلیں غیر مساوی۔ تب اگر ہم حقیقی ابدال کے ذریعہ جملہ

$$(1) \quad \frac{ما^۱}{عہ - عہ} + \dots + \frac{ما^۲}{عہ - عہ} + \frac{ما^۱}{عہ - عہ} + \frac{ما^۱}{عہ - عہ}$$

کو جہاں

$$ما^۱ = لا + عہ لا + عہ لا + \dots + عہ لا$$

مربعوں کے ایک مجموعہ میں تحویل کریں تو مثبت سروں والے  
مربعوں کی تعداد مساوات ف (لا) = کے خیالی اصولوں کے  
زوجوں کی تعداد اور غہ سے بڑی حقیقی اصولوں کی تعداد کے مجموعہ  
کے مساوی ہوگی۔

مسئلہ صحیح رہیگا اگر ہم (عہ - غہ) کی بجائے (عہ - غہ) لیں  
جہاں م شگونی مثبت یا منفی طاقت صحیح نہ دے۔  
جو کچھ ہم نے اس سے قبل ثابت کیا ہے اس سے یہ مسئلہ فوراً حاصل ہو  
سکتا ہے اگر ہم تقابل (۱) کے اصول پر جو حقیقی اصولوں سے اور خیالی  
اصولوں سے متعلق ہیں علیحدہ علیحدہ غور کریں کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ غہ سے  
بڑی ہر اصل کے لئے ایک مثبت مربع ہے اور ہم یہ ثابت کر چکے  
ہیں کہ مزدوج خیالی اصولوں سے ایک مثبت حقیقی مربع اور ایک  
منفی حقیقی مربع حاصل ہوتا ہے اور ان کی وجہ سے دوسرے مربعوں کا  
جواں اصولوں پر منحصر نہیں ہیں کوئی اثر نہیں پڑتا۔  
اب کسی دو عددوں غہ اور غہ کے درمیان حقیقی مربعوں کی



تعداد آسانی کے ساتھ تخمین میں آسکتی ہے۔ کیونکہ اگر ہم ف میں مثبت مربعوں کی تعداد کو پ سے تعبیر کریں جبکہ غ = غہ اور مساوات ف (لا) = کی غہ سے بڑی اصلوں کی تعداد کو ن سے اور خیالی اصلوں کی تعداد کو ۲ ع سے تعبیر کریں تو

$$پا = ن + ع \quad پام = ن + ع$$

اس لئے

$$ن - ن = پ - پ$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ غ اور غہ کے درمیان حقیقی اصلوں کی تعداد اس فرق کے مساوی ہوتی ہے جو مثبت یا منفی مربعوں کی تعداد کے درمیان ہوتا ہے جبکہ غہ کی قیمتیں علی الترتیب غہ اور غہ ہیں۔ یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ جو تعداد یہاں متعین کی گئی ہے وہ دی ہوئی مساوات سے متعلق تفاعلوں کے ایک سلسلہ پر منحصر ہوتی ہے۔ ان تفاعلوں کو اخذ کرنے کے لئے ہم ف کی اس شکل (صفحہ ۲۰۲)

$$\frac{1}{1} \frac{\Delta}{\Delta} + \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Delta} + \frac{1}{3} \frac{\Delta}{\Delta} + \dots + \frac{1}{n} \frac{\Delta}{\Delta}$$

پر غور کرتے ہیں جہاں  $\frac{1}{1} \frac{\Delta}{\Delta}, \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Delta}, \dots, \frac{1}{n} \frac{\Delta}{\Delta}$  میں سے کوئی صفر نہیں ہے۔ عدد پ سے اس شکل کے سروں کی وہ تعداد بیان ہوتی ہے جو مثبت ہیں۔ یعنی الفاظ دیگر حسب ذیل مقداروں کی تعداد جو منفی ہیں:-

$$- \frac{1}{1} \frac{\Delta}{\Delta} - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Delta} - \frac{1}{3} \frac{\Delta}{\Delta} - \dots - \frac{1}{n} \frac{\Delta}{\Delta} \quad (۲)$$



بالکل اسی طریقہ سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$\Delta = \frac{\nabla (\text{عہ}^1, \text{عہ}^2, \text{عہ}^3, \dots, \text{عہ}^n)}{(\text{عہ}^1 - \text{عہ}^2)(\text{عہ}^2 - \text{عہ}^3) \dots (\text{عہ}^{n-1} - \text{عہ}^n)}$$

جہاں ترقیم  $\nabla (\text{عہ}^1, \text{عہ}^2, \text{عہ}^3, \dots, \text{عہ}^n)$  کو  $\text{عہ}^1, \text{عہ}^2, \text{عہ}^3, \dots, \text{عہ}^n$  کے فرقوں

(187)

کے مربعوں کے حاصل ضرب کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

پس مقادیر  $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \dots, \Delta^n$  سب کی سب معلوم ہو گئیں۔

اب سلسلہ (۲) کی ہر کسر کے نسب نما اور شمار کنندہ کو  $\Delta$  سے ضرب دیں تو  $\Delta$  کی ہر قیمت صحیح شکل میں حاصل ہوتی ہے اور سلسلہ ہو جاتا ہے

$$(۳) \quad \frac{\Delta^1}{\Delta^1}, \frac{\Delta^2}{\Delta^2}, \frac{\Delta^3}{\Delta^3}, \dots, \frac{\Delta^n}{\Delta^n}$$

جہاں

$$\Delta^1 = (\text{عہ}^1 - \text{عہ}^2)(\text{عہ}^2 - \text{عہ}^3) \dots (\text{عہ}^{n-1} - \text{عہ}^n)$$

$$\Delta^2 = (\text{عہ}^1 - \text{عہ}^3)(\text{عہ}^2 - \text{عہ}^4) \dots (\text{عہ}^{n-2} - \text{عہ}^n)$$

$$\Delta^3 = (\text{عہ}^1 - \text{عہ}^4)(\text{عہ}^2 - \text{عہ}^5) \dots (\text{عہ}^{n-3} - \text{عہ}^n)$$

$$\Delta^n = (\text{عہ}^1 - \text{عہ}^n)$$

$$\Delta^n = (\text{عہ}^1 - \text{عہ}^n)$$

چونکہ سلسلہ (۳) کی منفی ارقام سلسلہ  $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \dots, \Delta^n$  میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کے متناظر ہوتی ہیں اسلئے یہ ثابت ہوتا ہے کہ اس آخری سلسلہ علامت کی جتنی تبدیلیاں  $\Delta$  کے قیمت  $\Delta$  سے قیمت  $\Delta$  تک

گزرنے میں کم ہوتی ہیں انکی تعداد مساوات ف (غہ) =۔ کی ان حقیقی اصولوں کی تعداد کے ٹھیک مساوی ہوتی ہے غہ اور غہ کے درمیان واقع ہیں۔

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ تفاعل و، و، و، و، وغیرہ جو یہاں حاصل ہوئے ہیں وہی خاصیت رکھتے ہیں جو اسٹرم کے تفاعلوں میں ہے۔ اسٹرم کے تفاعلوں اور ان تفاعلوں میں صرف اتنا فرق ہے کہ یہ تفاعل (و، و، و، و، وغیرہ) صرف مثبت ضاربوں میں اسٹرم کے تفاعلوں سے مختلف ہیں۔ اس فرق کو سلوسٹرنے معلوم کیا تھا اور ان سے ان شکلوں کو سب سے پہلے فلاسفیکل میگزین بابۃ دسمبر ۱۸۳۹ء میں شائع کیا تھا۔ تفاعلوں کے ان دو سلسلوں میں مماثلت ثابت کرنے کے لئے ہم پہلے حسب ذیل دفعہ میں ایک اہم مسئلہ ثابت کرتے ہیں۔ یہ مسئلہ اسٹرم کے تفاعلوں کے فائق سروں اور ایک مساوات کی اصولوں کی قوتوں کے مجموعوں کے درمیان ایک ربط کو بیان کرتا ہے۔

۲۰۲۔ اسٹرم کے امدادی تفاعلوں کے فائق سروں یعنی

ف (لا) اور (ن - ۱) باقیات [ان مقاطعات

س س س س س  
س س س س س  
س س س س س  
س س س س س  
س س س س س  
س س س س س  
س س س س س  
س س س س س

سے صرف مثبت اجزائے ضربی میں متفرق ہوتے ہیں۔  
خطوط وحدانی کی ترقیم استعمال کر کے ہم ان مقاطعات کو شکل



$$ل_۱ = ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + \dots + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱$$

کا مان لینے اور (۱) میں مساوات ف (لا) = کی کوئی اصل عہدہ  
کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + \dots + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱}{ف (عہدہ)}$$

اسکو علی التواتر عہدہ ۱، عہدہ ۲، عہدہ ۳، عہدہ ۴، عہدہ ۵ سے ضرب دو۔ دوسری

(189) اصولوں کے ابدالات اسی طرح عمل میں لاؤ۔ اس طور پر حاصل شدہ  
مساواتوں کو جمع کرو تو مثال ۴ صفحہ ۲۵۵ جلد اول کے رشتوں کی مدد  
سے ہمیں مساواتوں کا حسب ذیل نظام ملتا ہے:-

$$ل_۱ = ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + \dots + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱$$

$$ل_۲ = ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + \dots + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱$$

$$\dots$$

$$ل_۳ = ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + \dots + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱$$

$$ل_۴ = ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + \dots + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱ + ل_۱$$

ان مساواتوں سے بغیر کسی مشکل کے حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} ل_۱ & ل_۱ & ل_۱ & ل_۱ & \dots & ل_۱ & ل_۱ & ل_۱ & ل_۱ \\ ل_۱ & ل_۱ & ل_۱ & ل_۱ & \dots & ل_۱ & ل_۱ & ل_۱ & ل_۱ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ل_۱ & ل_۱ & ل_۱ & ل_۱ & \dots & ل_۱ & ل_۱ & ل_۱ & ل_۱ \end{vmatrix}$$

ل\_۱ = جہد



حاصل ہوتے ہیں۔

$$ر_1 + ب_1 - ر_2 + ب_2 = ر_1 + ب_1 - ر_2 + ب_2 = \dots$$

$$= ر_1 + ب_1 - ر_2 + ب_2 = \dots$$

$$ر_1 + ب_1 - ر_2 + ب_2 = ر_1 + ب_1 - ر_2 + ب_2 = \dots$$

$$= ر_1 + ب_1 - ر_2 + ب_2 = \dots$$

جہاں  $ر_1 + ب_1 - ر_2 + ب_2 = ر_1 + ب_1 - ر_2 + ب_2 = \dots$

(190) اب تھانکہ (۲) میں لا کی بڑی سے بڑی قوتوں کے سروں کا

مقابلہ کرو اور چونکہ لا صرف  $ر_1 + ب_1$  میں واقع ہوتا ہے اس لئے

اوپر حاصل کردہ مقطعاتی شکلیں استعمال کرنے سے ہیں حاصل ہوتا ہے۔

$$ج_1 + (ب_1 + ب_2 + \dots + ب_n) - (ر_1 + ر_2 + \dots + ر_n) = \dots$$

$$یا ج_1 + ج_2 + \dots + ج_n = (ب_1 + ب_2 + \dots + ب_n) - (ر_1 + ر_2 + \dots + ر_n)$$

نیز معمولی طریقہ سے  $ر_1$  کی قیمت محسوب کی جائے تو

$$ر_1 = \frac{ب_1}{ب_1 + ب_2 + \dots + ب_n}$$

جس سے ہم دیکھتے ہیں کہ  $ج_1$  کی قیمت  $\frac{ب_1}{ب_1 + ب_2 + \dots + ب_n}$  ہے۔

جہ کی کسی دو متواتر (متصلہ) قیمتوں کے درمیان جو ربط اوپر



معلوم کیا گیا ہے اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جسم، جسم، ...، جسم  
وغیرہ سب کے سب مثبت مربع ہیں اور اسلئے آخر الامر میں جو ممکن  
ہیں لا کی بڑی سے بڑی قوت کا سر ہے وہی علامت رکھتا ہے جو  
مقطع (س س س س ... میں) کی ہے۔

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ لائے (ن۔ ث) درجہ کے تفاعل کو  
شکل

ف (لا)۔ ب (لا)

میں بیان کر نیکا صرف ایک طریقہ ہے چہاں اور ب علی الترتیب  
(ث۔ ۱) اور (ث۔ ۲) وہیں درجوں کے ہیں اور ف (لا) کا درجہ ن ہے  
کیونکہ یہ تفاعل بالعموم ن + ث۔ ۲ درجہ کا ہوتا ہے اور اسلئے اس کو  
ن۔ ث درجہ تک گھٹانے میں بڑی سے بڑی رقموں کی (ث۔ ۲) تعداد  
معدوم ہونی چاہئے اور یہ ٹھیک وہی تعداد ہے جو اور ب  
میں غیر معین مقداروں کی ہے جنکو ہم خارج کر سکتے ہیں کیونکہ ہمیں  
صرف سروں کی نسبتوں سے واسطہ ہے۔ اس طرح اسٹرم کے باقیات  
ایک غیر معین ضارب کے ساتھ حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

تفاعل کراؤ اور ب کلا، عم، عم، ...، عم کے فرقوں کے

تفاعل ہیں اور اسلئے بانفاظ دیگر وہ ف (لا) کے نیم ہم متغیر ہیں۔ یہ

اس طرح دیکھا جاسکتا ہے کہ متماثلہ کراؤ = اؤ ف (لا)۔ ب ف (لا)

میں لا کی بجائے لا + غہ اور عمر کی بجائے عمر + غہ رکھا جائے

اور یہ یاد رکھا جائے کہ ف (لا) اور ف (لا) نہیں بدلتے اور اس لئے

کمزور اور بڑے غے پر منحصر نہیں ہیں کیونکہ شر کو متعین کر دینے کے بعد وہ ف (لا) اور ف (لا) کی مدد سے یگانہ طور پر دریافت ہو جاتے ہیں۔ دفعہ ذیل کی بحث سے معلوم ہو گا کہ ان تفاعلوں کی قیمت (191) لا اور اصلوں کے فرقوں کی رقوم میں دراصل کیا ہے۔

۲۰۵۔ اسٹرم کے تفاعلوں کیلئے سلوسٹر کی شکلیں۔ اب ہم دفعہ ماسبق کی ترقیم استعمال کرتے ہوئے یہ بتاتے ہیں کہ اسٹرم کا باقی کمزور تفاعل ویز سے صرف مثبت جزو ضربی جزو کے لحاظ سے متفاوت ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{کمزور} = \text{لڑ ف (لا)} - \text{بڑ ف (لا)} \quad (۱)$$

$$\text{جہاں } \text{کمزور} = \text{ب} + \text{ر} + \text{لا} + \text{لہ} + \text{لا}^۲ + \text{لہ}^۲ + \dots + \text{لہ}^۳ - \text{لا}^۳$$

$$\text{لڑ} = \text{لہ} + \text{لہ} + \text{لا} + \text{لہ} + \text{لا}^۲ + \text{لہ}^۲ + \dots + \text{لہ}^۳ - \text{لا}^۳$$

$$\text{ب} = \text{مہ} + \text{مہ} + \text{لا} + \text{مہ} + \text{لا}^۲ + \text{مہ}^۲ + \dots + \text{مہ}^۳ - \text{لا}^۳$$

نیز اوپر دی ہوئی لڑ کی قیمت سے ہمیں فوراً حاصل ہوتا ہے

$$\text{لہ} - \text{لڑ} = \text{جہ} \quad \nabla \quad (\text{عم} + \text{عم} + \text{عم} + \text{عم} + \dots - \text{عم}^۳)$$

اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ کمزور اور ویز کے فائق سر صرف جزو ضربی جزو سے متفاوت ہیں۔ اب ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ ان

تفاعلوں کے آخری سر اُسی جزو ضربی سے متفاوت ہیں۔ اس مقصد کے لئے مثلاً (۱) کو ف (لا) سے تقسیم کرو، اسیں مساوات

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{ف}{لا} + \frac{ف}{لا} + \frac{ف}{لا} + \dots + \frac{ف}{لا}$$

سے اندراجات کرو، اور سروں کا مقابلہ کر دو تو

$$مب = لم س + لم س + لم س + \dots + لم س + لم س$$

$$سم = لم س + لم س + لم س + \dots + لم س + لم س$$

$$\dots \dots \dots$$

$$مسو = لم س + لم س + لم س + \dots + لم س + لم س$$

نیز (۱) میں لا = رکھے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$لم = لم س + لم س + لم س + \dots + لم س + لم س$$

اور مب کی قیمت لم، لم، لم وغیرہ کی رقوم میں درج کرنے سے

$$لم = لم س + لم س + لم س + \dots + لم س + لم س$$

پس لم، لم، لم، ... لم کو وہی قیمتیں دینے سے جو لم کو محسوب (12)

کرنے میں دی گئی ہیں ہم حاصل کرتے ہیں:-

لم	لم س	لم س	...	لم س	لم س
لم	لم س	لم س	...	لم س	لم س
...	...	...	...	...	...
لم	لم س	لم س	...	لم س	لم س

$$لم = (۱) س + س + س + \dots + س + س$$



لڑ ایک متشکل تفاعل کے طور پر لکھا جاسکتا ہے جس میں صرف لا اور  
اصلیں شامل ہوتی ہیں یعنی

$$\sum_{j=1}^n (b_j - c_j) (a_j - b_j) (a_j - c_j) \dots (a_j - z_j) \quad (19)$$

۲۔ اسی ترقیم کو استعمال کر کے ثابت کر دو کہ

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{جہاں } s_j = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) (a_k - c_k) \dots (a_k - z_k)$$

$$\text{جہاں } s_j = s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots + s_{n+1} + \dots + s_{2n-1} + \dots + s_{2n}$$

۳۔ اسی ترقیم کو استعمال کر کے اور

$$\sum_{j=1}^n (b_j - c_j) (a_j - b_j) (a_j - c_j) \dots (a_j - z_j) \quad (20)$$

کو عن سے تعبیر کر کے ثابت کر دو کہ عر کا مینز مسادات جہاں لڑ سے  
متعین ہو سکتا ہے اور بالراست بتاؤ کہ اگر لا کی کسی خاص قیمت کے لئے  
لڑ = ۰ تو لا کی اسی قیمت کیلئے لڑ اور لڑ مختلف علامت ہیں۔

## فصل (۳) متفرق مسائل

۲۰۶۔ پانچ درجی کو تین پانچویں قوتوں کے مجموعہ میں  
تحویل کرتا۔ ہم ثابت کرینگے کہ یہ استحالات تیسرے درجہ  
کی ایک مساوات کو حل کرنے سے عمل میں لایا جاسکتا ہے۔  
فرض کرو کہ

$$(۱، ۱، ۱، ۱، ۱) (۱، ۱، ۱، ۱، ۱) (۱، ۱، ۱، ۱، ۱) (۱، ۱، ۱، ۱، ۱) (۱، ۱، ۱، ۱، ۱)$$

جہاں  $۱، ۱، ۱، ۱، ۱$  ہم مساوات

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

کی اصلیں ہیں۔  
اب پانچ درجی کی ان دو شکلوں میں سروں کا متعادل کرنے سے

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

پس

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

اب اگر ان مساواتوں کو مساوات

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

کے ساتھ لیا جائے تو یہ، یہ، یہ کو متعین کر نیکی لئے ہمیں حسب ذیل مساوات ملتی ہے:-

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

جب اس مساوات سے یہ، یہ، یہ معلوم ہو جائیں تو ظاہر ہے کہ ب، ب، ب کی کوئی قیمتیں جو اوپر کی چھ مساواتوں میں سے تین کو پورا کریں یقیناً تین کو بھی پورا کریں گی، اس لئے ب، ب، ب مساواتوں

$$ب + ب + ب = ب$$

$$ب + ب + ب = ب$$

$$ب + ب + ب = ب$$

سے معلوم ہوتے ہیں اور اس طرح حل کی تکمیل ہو جاتی ہے۔  
پانچ درجہ کا یہ اہم استحالہ حسب ذیل عام مسئلہ کی (جو بالکل اسی طریقہ پر ثابت ہو سکتا ہے) ایک خاص صورت ہے:-

لا، ما کا کوئی تجانس تفاعل جس کا درجہ ۲-۱-۱ ہو شکل

$$ب(لا-ب، ما) + ب(لا-ب، ما) + ... + ب(لا-ب، ما) + ب(لا-ب، ما) = 0$$

میں ن ویں درجہ کی ایک مساوات کو حل کرنے سے تحویل ہو سکتا ہے۔

یہ مسئلہ سلو کرنے دریافت کیا تھا۔  
متغیری کے کبھی ج کو اگر لا، ما میں متجانس مساوات کے  
طور پر لکھا جائے (جس کو قانونیہ کہتے ہیں) تو یہ کبھی

پ (لا - ہم ما) (لا - ہم ما) (لا - ہم ما)  
کے مساوی ہوتا ہے اور اس کو ہی ہم متغیر ہونا چاہئے کیونکہ اگر پانچ درجہ شکل  
ع + د + ط میں بیان کیا جائے تو استحالات کے بعد وہ ع + د + ط  
ہو جائیگا جہاں ع، و، ط ابتدائی ع، و، ط کی استحالات ہیں لیکن  
استحالات پانچ درجہ کو یگانہ طور پر شکل  
ع + د + ط

(195) میں بیان کیا جا سکتا ہے اور اسے ع، د، ط جو استحالات مساوات سے بنائے  
گئے ہیں ع، و، ط کے مساوی ہیں جو ع، و، ط سے بالواسطہ  
مستحیل کئے گئے ہیں اور ع، و، ط کو متناظر طریقہ سے ابتدائی پانچ درجہ  
سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس لئے معلوم ہوا کہ ع و ط ایک متعلق  
ہم متغیر ہے۔ یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ قانونیہ دو درجہ  
متغیر کا غیر متغیر ہے سب درجے میں ع، د، ط، و، ط کی بجائے  
جف ع، جف د، جف ط

جف لا، جف لا جف ما، جف ما

مندرجہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے جہاں ع دیا ہوا پانچ درجہ ہے۔  
یا قانونیہ وہ ہم متغیر ہے جس کا مخرج ہے سے لا، لا، لا، لا، لا کو  
لا، لا، لا، لا، لا میں بدل کر حاصل کیا جاتا ہے۔

جب کبھی ج کی ایک اصل لامتناہی ہو تو شکلوں ما، پہلا، پہلا، پہلا کا



استعمال کر کے ہم  $۱، ۲، ۳$  کے لئے ایک مساوات حاصل کرتے ہیں جسکی ایک اصل صفر ہے۔

جب کبھی ج کی دو اصلیں مساوی ہوں یعنی  $۱ = ۲$  تو تین پانچویں قوتوں میں انجول نامکن ہے کیونکہ  $۱، ۲، ۳$  کے لئے مساواتوں میں سے ہم کسی تین کو بھی پورا نہیں کر سکتے۔ یہ اصلے کہ ان مساواتوں میں  $۱، ۲، ۳$  صرف شکل  $۱ + ۲ + ۳$  میں پائے جاتے ہیں۔  $۱ = ۲ + ۳$ ،  $۲ = ۱ + ۳$ ،  $۳ = ۱ + ۲$  یہ رکھو اور  $۱، ۲، ۳$  کی قیمتیں  $۱، ۲، ۳$  سے یہ کی رقوم میں معلوم کرو اور لا۔  $۱، ۲، ۳$  لا۔  $۱، ۲، ۳$  کی بجائے  $۴، ۵، ۶$  سے یہ ماکھو تو انتہا میں جبکہ  $۴ = ۵ + ۶$ ۔ یہیں معلوم ہوتا ہے کہ

پانچ درجی کو شکل  $۴ + ۵ + ۶$  ج و میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

نیز اگر قانونیہ کی تمام اصلیں مساوی ہوں تو یہیں معلوم ہوتا ہے کہ آخری شکل سے انتہا میں جبکہ یہ  $۴ = ۵ + ۶$  پانچ درجی کو شکل  $۴ + ۵ + ۶$  میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

اگر قانونیہ متماثلاً صفر ہو جائے تو ہم  $۴، ۵، ۶$  معلوم کر سکتے ہیں ایسے کہ

$$۴ - ۵ - ۶ = ۴ + ۵ + ۶ = ۴ - ۵ - ۶ + ۴ + ۵ + ۶ = ۴ - ۵ - ۶$$

$$۴ - ۵ - ۶ = ۴ + ۵ + ۶ = ۴ - ۵ - ۶ + ۴ + ۵ + ۶ = ۴ - ۵ - ۶$$

اور اگر ہم  $۱، ۲، ۳$  کو مساوات  $۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ = ۱۰$  کی اصلوں کے

مساوی لیں تو پانچ درجی کو شکل  $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹$  میں یعنی

دو پانچویں قوتوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کر سکتے ہیں۔ اس طریقہ کو جو پانچ درجی کے لئے استعمال کیا گیا ہے عمل میں لا کر اگر ہم چار درجی کو

دو چوتھی قوتوں کے مجموعہ کے طور پر ظاہر کرنے کی کوشش کریں تو



طریقہ سے اور یہ مانکر کہ  $\bar{\epsilon}$  صفر نہیں ہے  $\bar{\epsilon}$  کو دو خطی تقاطعوں  $\bar{\epsilon}$  و  $\bar{\epsilon}$  کے مکعبوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ مفروض کی رو سے  $\bar{\epsilon}$  معدوم نہیں ہوتا اس لئے  $\bar{\epsilon}$  بھی معدوم نہیں ہوتا اس لئے

$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^3 + \bar{\epsilon}^2$  پس  $\bar{\epsilon}$  کو استعار  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2 + \bar{\epsilon}^3$  سے  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2$  طہ و یا  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2 + \bar{\epsilon}^3$  سے  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2$  (جہاں  $\bar{\epsilon}^2 = \bar{\epsilon}^3$ ) اس میں تسخیل کیا جاسکتا ہے۔

یہ دیکھا جائے کہ اگر ایک کثیر رقمی  $\bar{\epsilon}$  (لا'ما) کے لئے  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2$  ہو تو  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2$  اور  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2 + \bar{\epsilon}^3$  ہمارے لئے اور  $\bar{\epsilon}$  کا اس طرح انتخاب کرنے سے کہ  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2$  معدوم نہ ہو ہم  $\bar{\epsilon}$  کو ایک ایسی شکل میں تسخیل کر سکتے ہیں جس میں  $\bar{\epsilon}$  معدوم نہ ہو۔ اس طرح ایک کبھی  $\bar{\epsilon}$  کو جس میں  $\bar{\epsilon}$  معدوم ہوتا ہوا ایسے کبھی میں تسخیل کر سکتے ہیں جس میں  $\bar{\epsilon}$  معدوم نہ ہو اور پھر جلد اول صفحہ ۱۱۲ کے طریقہ سے اس کو دو مکعبوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کرتے ہیں۔ اب اگر  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2 + \bar{\epsilon}^3$  ل لا رکھا جائے تو ابتدائی کبھی دو مکعبوں کے مجموعہ کے طور پر بیان ہو جائیگا۔

(ب) اگر  $\bar{\epsilon}$  متاملاً معدوم ہو تو  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2$  اور چونکہ مفروض کی رو سے  $\bar{\epsilon}$  بھی متاملاً معدوم ہوتا ہے اور اس لئے  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2$  پس  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2$  رکھنے سے جہاں  $\bar{\epsilon}^2 = \bar{\epsilon}^3$  اور لا'ما اور لا'ما میں کوئی دوسرا خطی رشتہ لینے سے  $\bar{\epsilon}$  کو  $\bar{\epsilon}$  میں تسخیل کیا جاسکتا ہے۔

(ج) اگر  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2$  اور  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2$  تو  $\bar{\epsilon}$  کی شکل  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2$  ہے اور چونکہ

$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2 + \bar{\epsilon}^3$  اس لئے  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2 + \bar{\epsilon}^3$  پس  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^2 + \bar{\epsilon}^3$  طہ و













قوت سے ضرب دیا جائے۔ نیز اصلوں کے فرقوں کا کوئی اور تفاعل  
انہی مقداروں کا ایک تشاکل تفاعل ہونا چاہئے لیکن اسکا صحیح  
ہونا ضروری نہیں جب اسکو  $\frac{1}{2}$  سے ضرب دیا جائے۔ اس لئے  
اس تحقیقات سے غیر تابع نیم غیر متغیروں (یا ہم متغیروں) کی تعداد کی  
علوی انتہا نہیں ملے۔ تاہم گاردن (Gordan) نے یہ ثابت  
کیا ہے کہ کسی کثیر درجی کے نیم غیر متغیروں کی تعداد محدود ہے۔

مثلاً ہم  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  کی قیمتوں کو مختصر شکل

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  'گ'  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  'ہ' (دفعہ ۳)

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  'ف'  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  'گ' 'ہ'

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  'ہ'  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  'گ'  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  'ع'

میں لکھتے ہیں جہاں

'ف'  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$   $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$   $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$   $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

'ع'  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$   $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$   $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

جہاں چہ درجی  $\frac{1}{2}$  کا ایک نیم غیر متغیر 'ف' ہے اور ایک غیر متغیر 'ع'

(دیکھو مثلہ ۴، صفحہ ۱۶۵)۔ پس ہم نے ثابت کر دیا کہ چہ درجی کا  
ہر نیم غیر متغیر شکل

$\frac{1}{2}$  'پا' ( $\frac{1}{2}$  'ف' 'گ' 'ہ' 'ع' 'ع')

میں بیان کیا جاسکتا ہے جہاں 'پا' ایک منطوق صحیح تفاعل ہے۔ اور

اس لئے ہر ہم متغیر کو ۶ کی ایک قوت سے ضرب دینے کے بعد شکل  
(۶، ۶، ۶، ۶، ۶، ۶) گ، ۶، ۶، ۶، ۶، ۶  
میں رکھا جاسکتا ہے۔

ہم حسب ذیل اہم مشاہدہ کے ساتھ اس مفہوم کو ختم کرتے ہیں۔  
جب متعدد نیم غیر متغیروں کا ایک متعلق صحیح تفاعل اس طریقہ پر  
بنایا جاتا ہے کہ نتیجہ ۱ سے تقسیم پذیر ہو تو ایک نیا نیم غیر متغیر  
حاصل ہوتا ہے جو دوسرے نیم غیر متغیروں سے مختلف متصور  
کیا جاتا ہے۔

۲۱۰۔ ہر سٹ کا قانون متکافیت۔ مسئلہ:۔ ن دیں  
درجہ کے کثیر درجہ (۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱) (لا، ما) کے ہم متغیروں کی  
تعداد جنکا رتبہ سروں میں ۶ ہو وہی ہوتی ہے جو ۶ دیں  
درجہ کے کثیر رقمی (۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱) (لا، ما) کے ہم متغیروں کی  
تعداد ہے جن کا رتبہ سروں میں ن ہو۔

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ یہ سڈ کیلی کے اس مسئلہ پر منحصر ہے جو کسی کثیر درجہ کے ہوں  
رتبہ اور وزن والے مختلف نیم غیر متغیروں کی تعداد سے متعلق ہے (دفعہ ۱۶۵)۔ (201)  
جب ن دیں درجہ کے ایک کثیر درجہ کے لئے سروں کا ایک صحیح تناسب  
تفاعل بنایا جائے جو رتبہ ۶ اور وزن ک والی ان تمام ممکن رقموں پر مشتمل  
ہو جو سروں ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ میں سے بنائی جاسکتی ہیں تو یہ ثابت

ہو سکتا ہے کہ ترتیب ن اور اسی وزن ک کے متناظر جملہ میں جو عدد دیں  
درجہ کے ایک کثیر درجہ جی کے لئے بنایا گیا ہو رقموں کی تعداد جو سروں  
۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ سے بنائی ہوئی ہوں ٹھیک وہی ہوگی۔ اس مقصد کے لئے

سٹرٹس پرکس (Ferrers) نے رقم یہ رقم تخیل کے ایک ترتیب سے  
استعمال کیا ہے جو ایک مخصوص مثال پر استعمال کرتے ہیں اس سے بہت مسائل  
کے ساتھ سمجھ میں آسکتے ہیں۔

فرض کریں کہ پانچ درجہ کے ایک جملہ میں جو ترتیب ۵ اور وزن ۲۲  
ہوگا یہ رقم ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ شامل ہوتی ہے (جس کو ہم لکھتے ہیں  
۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲) اور فرض کریں کہ  
تو اترائے ضرب کے  
اعداد ان نقطوں کے ذریعہ انہی طور پر اس طرح ترتیب دے گئے ہیں۔



اب اگر نقطوں کو انہی ترتیب میں شمار کرنے کی بجائے انتہائی  
ترتیب پر شمار کیا جائے تو ہمیں یہ رقم ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ملتی ہے جس کا  
ترتیب ۵ اور وزن ۲۲ ہے یہ ظاہر ہے کہ اس طور پر ایک دوسرے

(202)

اخذ کردہ دو ارقام ہمیشہ مساوی وزن کی ہونگی کیونکہ دونوں صورتوں میں شمار کردہ نقطوں کی تعداد ہی ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ پانچ درجی کے سروں سے اخذ کردہ رتبہ ۸ اور وزن ۲۲ کی کسی رقم کے جواب میں رتبہ ۵ اور وزن ۲۲ کی ایک رقم ہے جو اسی طرح آٹھ درجی کے سروں سے حاصل ہوتی ہے۔ اسلئے کسی ایک تفاعل کی ہر رقم کے جواب میں دوسرے تفاعل کی ایک متناظر رقم موجود ہوتی ہے اور اگر رقموں کی ایک فہرست مکمل ہو تو اس سے اخذ کردہ فہرست بھی مکمل ہونی چاہیے اس استحالة کو استعمال کرنے میں یہ دیکھنا ضروری ہے کہ جس رستم کا استحالة کیا جا رہا ہے اگر اس میں متناظر کثیر درجی کا وہ سر شامل نہیں ہے جس کا لاحقہ بڑے سے بڑا ہے تو ماخوذ رقم کا رتبہ گھٹا ہوا ہوگا اور جزو ضربی ۱ کو مناسب قوت نامے کے ساتھ لگانا چاہیے کہ اس سے وزن پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔ اب چونکہ اس طور پر ایک دوسرے سے اخذ ہوئے والے جملوں میں رقموں کی تعداد ایک ہی ہوتی ہے اسلئے ہم اس نتیجہ کو فریم

(ن، ص، ک، ن) = (ن، ن، ک، ص)

سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ یہ اُن متشابه تفاعلوں کیلئے بھی درست ہے جس کا وزن ہر صورت میں بقدر ایک کے کم ہے۔ اس لئے

(ن، ص، ک، ن) - (ن، ص، ک، ۱ - ن) = (ن، ن، ک، ص) - (ن، ن، ک، ۱ - ص)

جس سے کیلی کے مسئلہ کی رو سے (صفحہ ۱۶۸) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ رتبہ ۸ اور وزن ۲۲ کے نیم غیر متغیروں کی تعداد جو سروں ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ میں سے بنائے جاسکتے ہیں اُس تعداد کے مساوی ہے جو رتبہ ۵ اور وزن ۲۲ کے نیم غیر متغیروں کی ہے جو سروں ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ میں سے بنائے جاسکتے ہیں۔



تے خطی استوار سے متعلق ہو جاتے ہیں۔ اس استوار کو پہلے استوار کا ہیرو کہتے ہیں۔ فرض کرو کہ خطی استوار

$$(1) \begin{cases} لا = لا + کا + با + ج + ع \\ ما = لا + کا + با + ج + ع \\ می = لا + کا + با + ج + ع \end{cases}$$

ہے پس کوئی خط لا، م، یا می استوار کے بعد لا، م، یا می بنے ہو جاتا ہے یہاں

$$(2) \begin{cases} ل = لا + م + با + ج + ع \\ م = لا + م + با + ج + ع \\ ن = لا + م + با + ج + ع \end{cases}$$

$$\text{نیز جف لا} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف می}}{\text{جف لا}}$$

$$\text{یا جف لا} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف می}}{\text{جف لا}}$$

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف می}}{\text{جف لا}}$$

$$\text{اور اسی طرح جف ما} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف می}}{\text{جف ما}}$$

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ع}} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ع}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ع}} + \frac{\text{جف می}}{\text{جف ع}}$$



(۱) میں سروں کے درمیان روابط

$$ا^۱ + ا^۲ + ا^۳ = ا^۱ب + ا^۲ب + ا^۳ب = ا^۱ج + ا^۲ج + ا^۳ج = ا^۱د + ا^۲د + ا^۳د$$

$$ا^۱ب + ا^۲ب + ا^۳ب = ا^۱ج + ا^۲ج + ا^۳ج = ا^۱د + ا^۲د + ا^۳د = ا^۱ه + ا^۲ه + ا^۳ه = ا^۱و + ا^۲و + ا^۳و$$

ہوں تو استحالات کو ”قائم“ کہا جاتا ہے۔ مثلاً یہ شرطیں ان سمتی جیوب التمام سے پوری ہوتی ہیں جو سلم ہندسہ محسوسات میں قائم محوروں کے دو مختلف جٹوں کے لحاظ سے ایک نقطہ کے محدود کے درمیانی رشتوں میں شامل ہوتی ہیں۔ ایسے کسی استحالات میں ظاہر ہے کہ ربط

$$لا + ما + ی = لا + ما + ی$$

مائل ہونا چاہیے اور۔ نئے متغیر پر۔ نے متغیروں کی رقوم میں یوں بیان ہونے چاہئیں:-

$$لا + ما + ی = لا + ما + ی = لا + ما + ی = لا + ما + ی = لا + ما + ی$$

نیز اگر استحالات کے متغیروں کے ایک متقطع کے طور پر لکھ کر اس کا مربع لیا جائے تو مساوی ہوگا۔ مساوی ہے اور باقی سب

عناصر معدوم ہوتے ہیں۔ جب لا، ما، ی کے ایک کثیر درجی کو تحلیل کیا جاتا ہے تو کوئی تفاعل

جس میں ابتدائی کثیر درجی کے سر شامل ہوں اور ان کے ساتھ دوسرے متغیر بھی جو متضاد بالامکانی ابدال سے حاصل ہوئے ہوں داخل ہوں

(205)

ضد متغیر کہلاتا ہے اگر یہ تفاعل استحالات شدہ سروں اور متغیروں کے متناظر تفاعل سے صرف استحالات کے مقياس کی ایک قوت سے متفاوت

ہو۔ مثلاً وہ شرط کہ ایک خط لا + ما + ی ایک مخروطی کو مس کرے ضد متغیر ہے جبکہ مخروطی کی مساوات سے خطی محدودوں میں دی گئی ہو۔





$\text{ل} = \text{ل} \text{ کا غیر قطع}$ ، تو معکوس ابدال کو  $\text{لا} = \text{ل} \text{ پ لا سے}$   
 بیان کیا جاتا ہے۔ وہ شرط کہ استحالة قائم ہو  $\text{ل} \text{ پ ل} =$  ہے اگر نہ  $\neq$  جب  
 لیکن اگر  $=$  جب تو شرط ہے  $\text{ل} \text{ پ ل} = \text{ا}$ ۔ پس ایک قائم استحالة میں  
 $\text{لا لا} = \text{ل} \text{ پ لا} \text{ ل} \text{ پ لا جہاں ع، پ، ج، تینوں کو اسے ن}$   
 ایک تمام قیمتوں کے لئے جمع کیا جاتا ہے اگر  $=$  جب کو مستقل رکھا جائے  
 اور ع کے لحاظ سے جمع کیا جائے تو  $\text{ل} \text{ پ ل} =$  بشرطیکہ  $\neq$  جب  
 اور  $=$  ایشترطیکہ  $=$  جب۔ پس  $\text{لا لا لا} = \text{لا پ لا}$ ۔ مزید بریں ایک قائم استحالة میں اگر  
 $\text{لا} = \text{ل} \text{ پ لا کو ل سے ضرب دیا جائے اور حاصل کا مجموعہ لیا جائے}$   
 تو حاصل ہوتا ہے  $\text{ل} \text{ پ لا} = \text{ل} \text{ پ ل} \text{ پ لا} = \text{لا پ لا} = \text{لا پ ل} = \text{ل} \text{ پ لا}$ ۔  
 عام استحالات میں اگر ط سے ماسی متغیر کو تفسیر کریں اور اس لئے  
 $\text{ط لا} = \text{ط لا تو ط لا} = \text{ط ل} \text{ پ لا} = \text{ط لا اور اس لئے ط} = \text{ل} \text{ پ ط}$   
 سے متکافی استحالة حاصل ہوتا ہے۔ نیز  $\text{جف} = \text{ل} \text{ پ جف}$ ۔ اس لئے  
 $\text{جف} = \text{ط}$  ایک ہی خطی استحالة کے تحت ہیں۔ ایک قائم استحالة میں



بیان کیا جاسکتا ہے جہاں یہ مان لیا گیا ہے کہ عہ یہ جہ کی مختلف ترتیبوں سے لے یہ جہ کی جتنی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں سب مساوی ہیں۔

اسی طرح چوتھے درجہ کا  $ج = ۱$  لے یہ جہ نہ لا لا لا لا لا جہ جہاں عہ یہ جہ نہ کی مختلف ترتیبوں سے لے یہ جہ نہ کی جتنی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں سب مساوی ہیں۔

اب  $\frac{جف عہ}{جف لاہ}$  معلوم کرنے کے لئے ہمیں دیکھنا چاہئے کہ چونکہ

عہ یہ جہ نہ کو اسے ن تک تمام قیمتوں کے لئے جمع کرنا پڑتا ہے اسلئے لے یہ جہ نہ میں ہر لائقہ کی جگہ پر عہ واقع ہوگا۔ مثلاً

$$\frac{جف عہ}{جف لاہ} = ۱ + عہ یہ جہ نہ لا لا لا لا لا + عہ یہ جہ نہ لا لا لا لا لا$$

$$+ عہ یہ جہ نہ لا لا لا لا لا + عہ یہ جہ نہ لا لا لا لا لا$$

$$= ۴ + عہ یہ جہ نہ لا لا لا لا لا$$

اسی طرح

$$\frac{جف عہ}{جف لاہ جف لاہ} = ۴ + عہ یہ جہ نہ لا لا لا لا لا$$

$$\frac{جف عہ}{جف لاہ جف لاہ جف لاہ} = ۴ + ۲ + عہ یہ جہ نہ لا لا لا لا لا$$

$$\frac{جف عہ}{جف لاہ جف لاہ جف لاہ جف لاہ} = ۴ + ۲ + عہ یہ جہ نہ لا لا لا لا لا$$

علیٰ ہذا القیاس ن متغیروں کے اور اعلیٰ درجوں کے کثیر رقمیوں کیلئے۔

## متفرق مثالیں

۱۔ طاق درجہ کا ہر کثیر درجی سروں میں دوسرے رتبہ کا ایک دو درجی ہم تغیر رکھتا ہے۔

کیونکہ جفت درجہ ۲م کا ہر کثیر درجی سروں میں دوسرے رتبہ کا ایک غیر تغیر رکھتا ہے (دفعہ ۱۰۰) جبکہ شکل ضعف (۶) یا (۲۱) ۱۰۰م میں لکھا جاسکتا ہے اور جفت درجہ کے کثیر درجی کا یہ غیر تغیر ایک ایسے کثیر درجی کا نیم غیر تغیر ہوگا جس کا درجہ ۲م + ۱ = ن ہے۔ اسلئے وہ ہم تغیر جس کا طاق سر یہ نیم غیر تغیر ہے دو درجی ہوگا کیونکہ ن - ۲ = ک = ۲ جہاں ک = ن - ۱ اور ۲ = ۲۔

۲۔ طاق درجہ (۲م + ۱ = ن) کا ہر کثیر درجی سروں میں درجہ ن کا ایک غلطی ہم تغیر رکھتا ہے جبکہ ن - ۳ سے بڑا ہو۔ کیونکہ اگر کچھ شال کا دو درجی ہم تغیر ع (لا' ما) ہو تو

$$ع (۶) = ل + لا + ل' ما$$

یہ ایک غلطی ہم تغیر ہے جیسے ل اور ل' کا رتبہ ن ہے۔ یہاں یہ مان لیا گیا ہے کہ ل اور ل' متماثل صفر نہیں ہیں جیسا کہ وہ کبھی کی صورت میں ہو جاتے ہیں۔

۳۔ طاق درجہ کا ہر کثیر درجی سروں میں چوتھے رتبہ کا ایک غیر تغیر شکل ل' ل' + ۲ ب ل' + ج کا رکھتا ہے۔

$$ع (۱۰' ما) کا میرے مطابق غیر تغیر ہے۔$$

۴۔ طاق درجہ ن کا ہر کثیر درجہ سروس میں چوتھے رتبہ کا ایک نیم غیر متغیر رکھتا ہے جو ن ویں درجہ کے ہم متغیر کا زائقہ سر ہے۔  
 کیونکہ پہلی مثال میں حاصل کردہ مینس کوڈن کے لحاظ سے تفرق کیا جائے  
 تو حاصل ہونے والے نیم غیر متغیر کے لئے  $۳۰ = ۳۰ - ۳۰ = ۰$  اور اس کے لئے  
 $۳۰ = ۳۰ - ۳۰ = ۰$  اور یہ اس کا ہم متغیر کا درجہ ہے جس کا فائق سر  
 جف  $\Delta$  ہے۔

طاق کثیر درجوں کے لئے اس طریقہ سے حاصل ہونے والے نیم غیر متغیر  
 (207) ۵۔ درجہ ۴ م کے کثیر درجہ سروس میں چوتھے درجے کے غیر متغیر رکھتے ہیں  
 کیونکہ کبھی کے غیر متغیر اس نمونہ  $\Delta$  کے ہوتے ہیں جس کا رتبہ سروس

۴ م ہے جہاں  $\Delta$  مینس ہے۔ یہ اور اس کے بعد کی چار مثالیں ہر سرے  
 کے قانون شکافیت کے نتائج صریح ہیں (صفحہ ۲۱۰)۔  
 ۶۔ درجہ ۴ م کے کثیر درجہ سروس میں چوتھے رتبے کے اتنے ہی غیر متغیر رکھتے  
 ہیں جتنے مل سادات ۲ ف + ۳ ق = ۴ م کے مثبت صحیح عددوں کے برابر ہیں  
 مثلاً پانچ درجہ سروس کا ایک غیر متغیر ہوتا ہے چھ درجہ کے دو سادات درجہ کا  
 ایک آٹھ درجہ کے دو و قس علیٰ ہذا۔  
 کیونکہ کثیر درجوں کے غیر متغیر اس نمونہ  $\Delta$  کے ہوتے ہیں  
 جس کا رتبہ سروس میں ۲ ف + ۳ ق = ۴ م ہے۔

۷۔ درجہ ۲ ف + ۳ ق کا ہر کثیر درجہ سروس میں دوسرے رتبہ کا ایک ہم متغیر  
 رکھتا ہے۔ بالخصوص جب ۴ ق = ۱ تو طاق درجہ کا ہر کثیر درجہ سروس میں دوسرے  
 رتبہ کا ایک دو درجہ ہم متغیر رکھتا ہے (مقابلہ کردہ مثال ۱ کے ساتھ)۔  
 کیونکہ دو درجوں کے ہم متغیر اس نمونہ  $\Delta$  کے ہوتے ہیں  
 جو سروس میں ۲ ف + ۳ ق رتبہ ہے۔







اگر عہ یہ مساوات  $ق لا + ق لا + ر ما =$  کی اصلیں ہیں تو  
 $ق لا - ق لا + ر لا =$ ،  $ف ب = ق ب + ر ب =$ ۔  
 اور اسلئے عہ یہ مساوات

$$ک = \begin{vmatrix} لا & لا + لا & ما \\ لا & لا & لا \\ ب & ب & ب \end{vmatrix} = 0$$

کی اصلیں ہوں گی۔

اگر ک = کی اصلیں مختلف ہیں تو ہر ٹیٹ (ا) کی پہلی دو مساواتوں  
 سے ہیں (ب) (ب) (ب) ل جاتے ہیں اور نتیجہ  $ع = (ع + ب + و)$   
 $ع = (ع + ب + و)$  حاصل ہوتا ہے۔

(ب) (ب) کی ان قیمتوں میں  $ب = ع + ص$  رکھنے سے اور  
 انتہا لینے سے جبکہ  $ص =$  ہم کو نتیجہ  $ع = و$ ،  $و = ع$  حاصل ہوتا ہے۔  
 اگر ک = تو  $ک = ب$ ،  $ک = ب$ ،  $ک = ب$  اور  $ع = ک$ ۔  
 ہم دیکھتے ہیں کہ ک = جے (ع، و) اور اسکے اجزائے ضربی ع، و ہیں۔  
 ۱۶۔ اگر تین دو درجیوں

$$لا + لا + ب لا + ج ما، لا + لا + ب لا + ج ما، لا + لا + ب لا + ج ما$$

کے سروں کے درمیان ربط

$$= \begin{vmatrix} لا & ب & ج \\ لا & ب & ج \\ لا & ب & ج \end{vmatrix}$$

ہو تو ثابت کرو کہ وہ خطی استحالوں سے ذیلیہ شکلوں

$$لا + ج ما، لا + ج ما، لا + ج ما$$

میں سمیل کئے جاسکتے ہیں۔

مندرجہ بالا مقطع اس بات کی شرط ہے کہ دئے ہوئے تین دو درجی نقطوں یا خطوں کا ایک نظام متعین کریں جو درجہ میں ہو۔

۱۔ اگر  $n$  متغیروں میں دو سرے درجہ کے دو تجانس تفاعل  $E$  و  $F$  ہوں جنکے سر حقیقی ہیں اور اگر متغیروں کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے مثبت ہو تو ثابت کرو کہ  $E = F$  کے نمبر کی تمام اصلیں حقیقی ہیں۔

ہم یہ قرار داد استعمال کرتے ہیں کہ اگر کسی رقم میں کوئی لاحقہ دو مرتبہ واقع ہو تو اس رقم کو لاحقہ کی اسے  $n$  تک تمام قیمتوں کے لئے جمع کرنا چاہئے۔

یہ قرار داد اختیار کر کے ہم لکھتے ہیں  $E = F$  لایہ  $E = F$  لایہ۔

اگر  $\Delta = (E - F)$  تو ہم  $\Delta$  لایہ  $\Delta$  لایہ  $\Delta$  لایہ کی ایسی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں کہ  $E = F$  لایہ  $E = F$  لایہ کیونکہ اگر  $\Delta$  کے تمام پہلے

صغیر مقاطعات صفر ہوں تو  $\Delta$  لایہ  $\Delta$  لایہ  $\Delta$  لایہ میں سے کسی دو کی انتہائی

قیمتیں لہجہ لگائی جاسکتی ہیں۔ یہ اسلئے کہ کوئی قیمتیں جو مساواتوں  $E = F$  لایہ  $E = F$  لایہ

میں سے  $n - 2$  مساواتوں کو پورا کرتی ہیں، تب یہ دو مساواتوں کو بھی پورا

کرتی ہیں۔ اسکو ثابت کرنے کے لئے ہم انیس سے  $n - 1$  مساواتیں لیتے ہیں اور ان کو کسی

(ن-۲) متغیروں کے سروں سے حاصل کئے ہوئے دوسرے رتبہ کے (ن-۱) (209)

صغیر مقطعوں سے ضرب دیتے ہیں اور پھر سب کو جمع کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ حاصل  $\Delta$  کیونکہ کسی متغیر کا سر یا تو پہلے رتبہ کا صغیر ہے یا ایک ایسا مقطع ہے

جس کے دو ستون حامل ہیں۔ پس سوائے اس صورت کے جبکہ دوسرے رتبہ کا ہر صغیر مقطع صفر ہو کم از کم دو خطی حامل مساواتیں موجود ہوتی ہیں جو ان

(ن-۲) مساواتوں کو جن کے (ن-۲) متغیروں کے سروں والا صغیر مقطع



ابدال میں باقی تمام سروں کے لئے بھی اختیاری حقیقی قیمتیں فرض کرو لیکن اسکا خیال رہے کہ میقاس صفر نہ ہونے پائے۔

لحمہ پہ لایہ = لحمہ پہ لایہ کو لایہ سے ضرب دو اور سب کو جمع کرو اور نیز

لا علف سے ضرب دو اور سب کو جمع کرو تو حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} & \text{لا لا لا} = \text{لحمہ پہ لایہ} + \text{لا لا لا} = \text{لحمہ پہ لایہ} + \text{لا لا لا} \\ & \text{لحمہ پہ لایہ} + \text{لا لا لا} = \text{لحمہ پہ لایہ} + \text{لا لا لا} \end{aligned}$$

پس ع میں لا اور لا کے سروں کے متناظر سروں کے لحمہ گنا کے مساوی ہیں۔

نیز اگر ہم یاد رکھیں کہ لحمہ پہ لایہ مثبت ہے اور معدوم نہیں ہوتا اور

اسکو کم سے تعبیر کریں اور اگر لا = لحمہ پہ لایہ + لحمہ پہ لایہ لایہ رکھیں

(210)

تو ہمیں حاصل ہوتا ہے لحمہ پہ لایہ + لحمہ پہ لایہ = لحمہ پہ لایہ + لحمہ پہ لایہ

تفاعل ہیں لا لا لا... لا کے اور متغیروں کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے مثبت ہے اسلئے اگر لا کی قیمت مساوات لا = لحمہ پہ لایہ سے معلوم کی جائے

تو لا لا لا... لا کی کسی قیمتوں کے لئے لحمہ پہ لایہ = لحمہ پہ لایہ - لحمہ پہ لایہ کے ساتھ

بھی یہی عمل کرتے ہیں جہاں لحمہ پہ لایہ (ن - ۱) متغیروں کے تفاعل ہیں اور اسلئے اسی طرح عمل جاری رکھ کر ہم مطلوبہ نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

اگر بالآخر لحمہ پہ لایہ = لحمہ پہ لایہ اور لحمہ پہ لایہ = لحمہ پہ لایہ - لحمہ پہ لایہ

$$= \text{حمہ پہ لایہ} - \text{حمہ پہ لایہ} - \text{حمہ پہ لایہ} - \dots - \text{حمہ پہ لایہ}$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ  $لہ' لہ' ... لہ' مساوات \Delta =$  کی صلیبیں  
مزید بریں ہم دیکھتے ہیں کہ اگر  $\Delta =$  کی دو صلیبیں  $لہ'$  کے مساوی ہوں تو

آخری شکل ۷۔  $لہ'$  کے مینر  $\Delta$  میں چونکہ صرف وتریں رقصیں ہوتی ہیں  
اسلئے  $لہ' = لہ'$  کیلئے  $\Delta$  کے تمام پہلے صغیرمقطعات معدوم ہو جاتے ہیں۔ اور  
چونکہ  $\Delta$  کو ایک مقطع  $\Delta =$  سے ضرب دیکر  $\Delta$  حاصل کیا جاتا ہے  
اسلئے  $\Delta$  کا کوئی پہلا صغیرمقطع دو آہستوں کا حاصل ضرب ہے جن میں سے  
ایک  $\Delta$  کے (ن-۱) قطاروں پر اور دوسرا  $\Delta$  کے (ن-۱) قطاروں  
مشتمل ہے پس  $\Delta$  کا پہلا صغیرمقطع،  $\Delta$  کے پہلے صغیرمقطعوں کا خطی تفاعل  
ہے اور اسلئے  $لہ' = لہ'$  کے لئے صفر ہو جاتا ہے۔ اسی طرح اگر  $لہ' = لہ'$  مساوات  
 $\Delta =$  کی تہری اہل ہو تو  $لہ' = لہ'$  کے لئے  $\Delta$  کے تمام دوسرے تہرے  
صغیرمقطعات صفر ہو جاتے ہیں۔ عام صورت کو بھی اسی پرتیاس کیا  
جاسکتا ہے۔

۱۹۔ تین کعبیوں ۷، ۸، ۹ کو تین کعبیوں کے ذریعہ بیان کرو۔

۷ = (۱-لا) ۷ + (۲-لا) ۷ + (۳-لا) ۷ + (۴-لا) ۷ + (۵-لا) ۷ + (۶-لا) ۷ + (۷-لا) ۷  
لکھنے سے حال ہوتا ہے

۱ = (۱+ب+ج) - (۱+ب+ج) = (۱+ب+ج) - (۱+ب+ج)

۱ = (۱+ب+ج) - (۱+ب+ج) = (۱+ب+ج) - (۱+ب+ج)

اور اسلئے اگر ۷، ۸، ۹ کے مساوات  $پ' لا' پ' لا' پ' لا' پ' لا' پ' لا' پ' لا'$

کی صلیبیں ہوں تو  $پ' لا' پ' لا' پ' لا' پ' لا' پ' لا' پ' لا' پ' لا'$

اسی طرح  $۷ = (۱+ب+ج) - (۱+ب+ج) = (۱+ب+ج) - (۱+ب+ج)$





نکالا جائے (دیکھو ایل کی مساواتیں)  
۲۱۔ ثنائی کعبی ع اور اس کا صیوی ھلا دئے گئے ہیں اور  
نسبتیں لا : ما اور لا : ما کعبی کو پورا کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\frac{\text{لا جف ھلا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{ما جف ھلا}}{\text{جف ما}}}{\text{لا ما} - \text{ما لا}} \times \frac{1}{\Delta}$$

ایک مطلق مستقل ہے۔ اس جملہ میں ع کا مینر Δ سے تعبیر کیا گیا ہے۔  
یہ جملہ خطی استحالة سے مطلق نہیں بدلتا کیونکہ

$$\text{ھلا}، \text{ما} = \text{ما}، \text{ھلا}، \Delta = \Delta، \text{ما}، \text{ھلا}$$

اور  $\left| \begin{array}{cc} \text{لا} & \text{ما} \\ \text{ما} & \text{لا} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \text{لا} & \text{ما} \\ \text{ما} & \text{لا} \end{array} \right|$  اور  $\left| \begin{array}{cc} \text{لا} & \text{ما} \\ \text{ما} & \text{لا} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \text{لا} & \text{ما} \\ \text{ما} & \text{لا} \end{array} \right|$   
ع کو ایک خطی استحالة سے جس کا مقياس ایک ہو دو کعبیوں میں تحویل

کرنے سے اس مستقل کا  $\frac{1}{\Delta}$  ہونا آسانی کے ساتھ دکھایا جاسکتا ہے۔ یہ

دفعہ ۶۰ کے ہم رسم ربط کی دوسری شکل ہے۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ سروں کی رقوم میں ایک منطق ہم رسم ربط کعبی مساوات  
کی ایک ہی اصل کے کسی دو منطق تقاطعوں کو مربوط کرتا ہے لیکن یہ ربط منطق نہیں ہوتا  
جب اصلیں مختلف ہوں۔

۲۳۔ چار درجہ (ا، ب، ج، د، ص) (لا، ا)

کو ایک ایسے چار درجہ میں تحویل کرو جس کا غیر متغیر ع معدوم ہو۔

$$\text{ما} = \text{لا} + ۲ \text{ع} + \text{طا}$$

اور استحالہ مساوات کے غیر متغیر ع کو صفر کے مساوی رکھو تو

$$\text{ح} (\text{غم} - \text{غم})^2 (\text{فہ} - \text{غم})^2 = ۰$$

(۱)







جواب :- (ع، گ، ع، ہ، لا، ما)

۲۹ - دو کمبیوں ع اور و کے لئے ثابت کرو کہ

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \\ \hline \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \\ \hline \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \\ \hline \end{array} \quad \text{ق} = ۱۶$$

جہاں ع، ع، وغیرہ تین حیسیوں کے غیر متغیر ہیں اور ق کا وہی

مفہوم ہے جو دفعہ ۱۹۲ میں -

۳۰ - مساداتوں

ی = (و، لا، و) + (و، لا، و) + (و، لا، و) + (و، لا، و) + (و، لا، و)

(و، لا، و) + (و، لا، و) + (و، لا، و) =

سے لا ساٹھ کرو۔

جواب :- ی + ۳ ہ + ی + گ =

۳۱ - دو درجی (و، ب، ج، ف، گ، م) (لا، ما، ی) کو

لا، ما، سے میں ستھیل کرو جہاں

لا = ع، لا، ہ، لا، ہ، ی، ما = ع، لا، ہ، لا، ہ، ی، م = ع، لا، ہ، لا، ہ، ی، م

+ ہ، م + ج، م، ی

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{لا} & \text{ما} & \text{ی} \\ \hline \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \\ \hline \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \\ \hline \end{array} \quad \text{جواب} = \frac{1}{2}$$

جہاں  $\text{آء} = (\text{عہ عہ} + \text{بہ بہ} + \text{جہ جہ} + \text{فہ فہ})$  (برجہ + بیہ جہ)  
 +  
 اور  $\text{ا} = (\text{بہ بہ} + \text{جہ جہ} + \text{فہ فہ})$  (عہ عہ + عہ عہ)  
 (ا، ب، ج، ف، گ، ہ، تفاعل  
 (ا، ب، ج، ف، گ، ہ، لا، ما، ی)

کی کسی شکل کے سر ہیں۔

۳۲۔ ثابت کرو کہ ابدال

ضما = ل + لا + م + ما، عا = لا - ضما

سے چار درجہ (ا، ب، ج، د، ص) (لا، ما، م، کو شکل

ک عا (م ضما - ع ضما عا + جے عا)

میں تحویل کر سکتے ہیں جہاں عہ، یہ، جہ، ضما اصلیں ہیں اور

$12 = 1 - 2$  (عہ - ضما) (بہ - ضما)  $12 = 1 - 2$  (عہ - ضما) (بہ - ضما) (جہ - ضما)  
 اور ک تفاعل ہے عہ، یہ، جہ، ضما کا۔

۳۳۔ اگر عا ایک چار درجہ ہو اور ہا اسکا ہیوسوی تو

ثابت کرو کہ عا، ہا - عا، ہا کے اجزائے ضربی لا - ما اور گ

کے تین دو درجہ اجزائے ضربی (دفعہ ۱۸۳) ہیں جبکہ لا کی بجائے  
 لا، ما اور ۲ لا کی بجائے لا + ما رکھ دے جائیں۔

۳۴۔ ثابت کرو کہ عا کے تمام چار درجہ ہم متغیر جنکی اصلیں عا  
 کی اصولوں کے منطق تفاعل ہیں ضابطہ

$(\text{عہ} + \frac{1}{4} \text{عہ} - 2 \text{جہ} + \frac{1}{4} \text{عہ}) - (\text{عہ} - 2 \text{جہ} + \frac{1}{4} \text{عہ} + \frac{1}{4} \text{عہ})$

میں شامل ہیں۔ (مسٹر ریل)  
 یہ مثال پچھلی مثال کے ساتھ کس طرح متعلق ہے۔

۳۵ - ثابت کرو کہ ع' ع' - ۱۱ جے ۱ کا ایک جزو ضربی

$$\frac{لا-ع}{ع-ع} + \frac{لا-ب}{ع-ب} + \frac{لا-ج}{ع-ج} = ع$$

$$ع = (لا-ع)(لا-ب)(لا-ج) = (لا-ع)$$

۳۶ - اگر ع' اور ع' دو چار درجی ہوں جو ایک ہی مطلق

غیر متغیر رکھتے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$ع جے ۱ - ع جے ۱$$

$$۱ لا ضا + ۱ ب لا + ۱ ج ضا = ۱$$

کو شکل

کے چار اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے - (مسطریل)

۳۷ - اگر ایک ہم متغیر کے صدر سر میں متعدد کثیر درجیوں کے

سر رتبوں ۱، ۲، ۳، ...، ۴، ۵ اور وزنوں ک، ۱، ۲، ۳، ...، ۴ میں

میں داخل ہوں تو ہم متغیر کا درجہ ہے

$$۱، ۲، ۳، ...، ۴، ۵ + ... + ۴، ۵ - ۲ (ک + ۱، ۲، ۳، ...، ۴)$$

(دفعہ ۱۶۶)

۳۸ - اگر مسادات ۶ = کے ایک نیم غیر متغیر فہ کی ساخت

میں ہر فرق ع - ع کی بجائے

$$\frac{ع - ع}{ع - ع} = ۶$$

درج کیا جائے تو ثابت کرو کہ نتیجہ ۶ - ک - ۱ اور اس ہم متغیر کا حاصل ضرب

ہے جس کا صدر سر فہ ہے جہاں فہ کا رتبہ ۵ اور وزن ک ہے -

۳۹ - اگر ۶ ایک پانچ درجی ہو تو چار درجی استخراج (emanant)

$$\left( \frac{\text{لا جف لا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{ما جف}}{\text{جفا}} \right) \text{ع}$$

کے غیر متغیر کیا ہیں۔

جواب :- وہ درجی اور کبھی ہم متغیر ع اور جے۔

۴۰۔ کسی کثیر درجی ع کے ہم متغیروں ہ، گ، ع، جے کو ملائیوا لارشتہ بیان کرو۔

جواب :- گ = ۲ھ - ع ھ + ع ے

۴۱۔ بتاؤ کہ طاق رتبہ کے ایک کثیر درجی کو کس طرح ستیں کیا جائے کہ تمام نئے سر غیر متغیر ہوں۔

جواب :- نئے لا اور ما کی بجائے دو خطی ہم متغیر لو۔

۴۲۔ وہ ربط معلوم کرو جو دو چار درجیوں کے سردوں کو مربوط کرتا ہے اگر انکی اصولوں میں یہ رشتہ ہو

$$= \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \\ \text{ہ} & \text{ہ} & \text{ہ} & \text{ہ} \\ \text{جہ} & \text{جہ} & \text{جہ} & \text{جہ} \\ \text{ضہ} & \text{ضہ} & \text{ضہ} & \text{ضہ} \end{vmatrix}$$

جواب :- ع ے - ع ے = ع ے

(مقابلہ کرو مثال ۱۳ صفحہ ۱۷۵ اور مثال ۱۴

صفحہ ۱۷۵ جلد اول کے ساتھ) ۴۳۔ کبھی ع کو اسکے کبھی ہم متغیر گ، ہ، ع، جے، جے کے ساتھ

(21)

$$\text{مساوات} \quad \frac{\text{لا جف لا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{ما جف}}{\text{جفا}} =$$











کہہ سکتے ہیں اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ استحالے مختلف طریقوں سے مکمل کئے جاسکتے ہیں لیکن ہر دو استحالوں میں جو فرق ہوتا ہے اس کا جزو ضروری آگے ہوگا۔

۲۱۳۔ دو درجی اور دو درجیوں کے نظام۔ دو درجی کا میز ہی ضرر اسکا غیر متغیر ہے اور یہ ثلاثی نظام میں بھی غیر متغیر ہے۔ اسکا معدوم ہونا وہ شرط ہے کہ دو درجی کے جواب میں جو خط ہے وہ مخروطی اک کو مس کرے۔ (218) اب ہم دو دو درجیوں کے نظام

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب لا} + ۳ \text{ ج ما} \quad ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب لا} + ۳ \text{ ج ما}$$

پر غور کرتے ہیں جنکو ہم ل اور م سے موسوم کریں گے۔

جب انکو مستحیل کیا جاتا ہے تو وہ دو خط ہو جاتے ہیں  
 $ل = ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب ما} + ۳ \text{ ج مے}$      $م = ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب ما} + ۳ \text{ ج مے}$   
 اب وہ شرط کہ خط ل م = م م = م مخروطی اک کو مس کرے

یہ ہے  
 $ل (۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب ما} + ۳ \text{ ج مے}) = م (۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب لا} + ۳ \text{ ج مے})$   
 (۲).....

اس مسادات کے تمام سر دونوں نظامات کے غیر متغیر ہیں۔ ہم قبل ازیں دیکھ چکے ہیں کہ پہلے اور آخری سروں کے لئے یہ مسئلہ دست ہے۔ درمیانی سر جو ثلاثی نظام کا موسیقی غیر متغیر ہے ثلاثی نظام میں بھی ایک غیر متغیر ہے جسکا معدوم ہونا اس بات کی شرط ہے کہ خطوط ل م مخروطی اک کے لحاظ سے فردوج ہوں۔ اس مسادات سے وہ ماس متعین ہوتے ہیں جو ل اور م کے نقطہ تقاطع میں سے مخروطی اک پر کھینچے جائیں۔ جب یہ نقطہ مخروطی پر ہو تو یہ ماس منطبق ہوتے ہیں اور دو درجی کا میز معدوم ہوتا ہے۔ پس دو درجیوں کے حامل استقام کے لئے ہندسی طور پر ہمیں حسب ذیل شکل ملتی ہے:-



ماصل ہوتے ہیں جو مخروطی ک کے لحاظ سے ایک خود مزدوج مثلث بناتے ہیں۔ وہ مسئلہ جو تین باہم موسیقی دو درجیوں سے متعلق ہے یعنی یہ کہ ان کے مربع ایک مماثل خطی رشتے سے مربوط ہوتے ہیں (دیکھو مثال ۶ صفحہ ۶) مخروطیوں کی ایک مشہور خاصیت سے منتج ہوتا ہے کیونکہ ک کو ل' م' ن کی رقوم میں شکل

$$ک = ل + م + ن$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ اسلئے ابتدائی متغیروں لا' ما' پر عود کرنے سے ک' تنہا لا' معدوم ہوتا ہے اور ل' م' ن ابتدائی دو درجی ہو جاتے ہیں اور ہر دو درجی ایک جزو ضربی پر تقسیم کیا ہوا ہوتا ہے اور یہ آسانی کیسا معلوم ہو سکتا ہے کہ یہ جزو ضربی اپنے متعلقہ دو درجی کے میٹر کا بعد از طریق ہے (دیکھو (۱) مثال ۶ صفحہ ۲۱۵ نیز مثال ۷ صفحہ ۳۳۹)۔

۲۱۴۔ چار درجی اور اسکے ہم متغیروں پر مہندسی طریقہ بحث سے دفعتاً آئندہ کی تحقیقاتوں سے یہ معلوم ہو گا کہ زیر بحث استحالات کو چار درجی ع. = (ل' ب' ج' د' م') (لا' ما') پر استعمال کرنے میں رشتہ ج' لا' ما' کی بجائے ج' لا' م' + ج' ما' رکھنا چاہئے۔ اس طرح اس چار درجی کی جگہ دو حسب ذیل مخروطیاں لے لینگیں:-

$$ع = لا' + ج' ما' + م' + م' + ج' لا' + ج' لا' ما'$$

ک = م' + لا' - ما' کی شکل جو یہاں منتخب کی گئی ہے ک کے ساتھ ایک غیر متغیر رشتہ مربوط ہے۔ ع اور ک کے غیر متغیر ابتدائی ثنائی شکل کے غیر متغیر ہیں کیونکہ ع + ع' ک کا میٹر م' ع' - ع' ع' + ج' ہے

ہے اور اسے ثلاثی نظام کے غیر متغیر ہیں  
 $\Delta = + \text{'طا'} = \text{'طا'} - \text{'ع'} = \Delta' = \text{جے}$   
 جہاں ع اور جے چار درجہ کے غیر متغیر ہیں اور ع + جے + غ کے کا مینر  
 حسب معمول اس شکل  
 $\Delta + \text{غ} + \text{'طا'} + \text{غ} + \text{'طا'} + \text{غ} = \Delta'$

میں لکھا گیا ہے۔  
 فرض کرو کہ مخروطی ع اور ک نقاط 'ا' 'ب' 'ج' 'د' میں قطع  
 کرتے ہیں جہاں یہ نقطے مساواتوں

$$\frac{\text{لا}}{\text{فا}} = \frac{\text{ما}}{\text{فا}} = \text{ے}$$

سے متعین ہوتے ہیں جبکہ یہ چار قیمتیں ع، ب، ج، د، ضہ اختیار کرتا ہے  
 جو ثنائی چار درجہ کی اصلیں ہیں۔ اور فرض کرو کہ مشترک وتر  
 ب ج، ا د، ج ا، ب د، ا ب، ج د کے نقاط تقاطع  
 علی الترتیب ع، ف، گ، ہ، جہاں ع، ف، گ، وہ شلت ہے  
 جو دونوں مخروطیوں کے لحاظ سے خود مزدوج ہے۔ اب خط ا ب  
 کی مساوات کو (ع، ہ) سے تعبیر کرنے اور اسی طرح کی ترقیم دیگر  
 وتروں کے لئے استعمال کرنے سے ہمیں مخروطیوں کے نظریہ سے  
 حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع} + \text{غ} = \text{ک} = (\text{ب، ج}) (\text{ع، ضہ}) + \text{ع} + \text{غ} = \text{ک} = (\text{ج، ع}) (\text{ب، ضہ})$$

$$\text{ع} + \text{غ} = \text{ک} = (\text{ع، ہ}) (\text{ج، ضہ})$$

جہاں غ، ع، غ، ع، مساوات ۴ غ - ع + غ = جے کی اصلیں ہیں۔

الذی مساواتوں میں ابتدائی متغیروں 'ا' 'ما' کو داخل کرنے سے

کے متغیرات میں بدلتا ہے اور جو دو درجہ اجزائے ضربی کے ایک  
 زوج میں بن مختلف طریقوں سے تحلیل کیا جاسکتا ہے جو چار درجہ کے

محول کبھی کے حل پر منحصر ہیں۔ پس یہ معلوم ہوا کہ چار درجی کو اسکے دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا اور خطوں کے ان جوڑوں کی تعین کرنا جو دو مخروطیوں کے چار نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں یہ دونوں علی مسئلے متماثل ہیں کیونکہ انہیں سے ہر ایک ایک ہی کبھی مساوات کے حل پر منحصر ہے۔

اب ہم یہ دکھائیں گے کہ  $ع$ ،  $ک$  کے مشترک خود مزدوج مثلث کے اضلاع ثنائی نظام کے چھ درجی ہم متغیر کے دو درجی اجزائے ضربی کے متساظر ہیں۔ چونکہ ضلع  $ف$ ،  $گ$ ،  $ع$  کا قطبی ہے اس لئے  $ع$  کے محدودا،  $مآ$ ،  $ان$  مساواتوں (بہ جہ) =، (عہ ضہ) =، کو حل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ پس

(221)

$$\frac{لا}{لا} = \frac{مآ}{ع} = \frac{لا}{لا}$$

یہ جہ (عہ + ضہ) - عہ ضہ (بہ + جہ) = ۲ (بہ جہ - عہ ضہ) بہ + جہ - عہ - ضہ

ان مساواتوں سے  $لا$ ،  $مآ$ ،  $ع$  کے کی جو قیمتیں ملتی ہیں انکو  $ع$  کے قطبی

$لا$ ،  $مآ$ ،  $ع$  کے قطبی

میں  $لا$ ،  $مآ$ ،  $ع$  کی بجائے درج کرنے سے یہ مساوات شکل

(بہ + جہ - عہ - ضہ)  $لا$  - (بہ جہ - عہ ضہ)  $مآ$  + { بہ جہ (عہ + ضہ) - عہ ضہ (بہ جہ) }  $ع$  = ۰

میں بیان ہوتی ہے۔

اب ابتدائی متغیروں  $لا$ ،  $مآ$  کو اسمیں داخل کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ جملہ چھ درجی ہم متغیر (دفعہ ۱۸۳) کا ایک دو درجی جزو ضربی ہے۔ پس یہ ثابت ہو گیا کہ وہ نقطے جہاں  $ف$ ،  $گ$ ،  $ک$  کو قطع کرتا ہے اس دو درجی مساوات

(بہ + جہ - عہ - ضہ)  $لا$  - ۲ (بہ جہ - عہ ضہ)  $مآ$  + { بہ جہ (عہ + ضہ) - عہ ضہ (بہ جہ) }  $ع$  = ۰

کو حل کرنے سے متعین ہوتے ہیں اور اسلئے  $ک$  پر کے چھ نقطے جو چھ درجی

ہم متغیر کی اصلوں کے متناظر ہیں وہ نقطے ہیں جہاں یہ مخروطی ۶ اور گ کے مشترک خود مزدوج مثلث کے اضلاع سے ملتا ہے۔  
گ پر کے ان نقطوں کو جو عیسوی کی اصلوں کے متناظر ہیں متعین کرنے کے لئے ہم مخروطیوں ۶ اور گ کے ہم متغیر مخروطی فا (Conic Section) (دفعہ ۳، ۸) کو محسوب کرتے ہیں اس طرح

$$\frac{1}{p} \text{ فا} = (ا ج - ب) لا + (ب د - ج) سا + (ج ص - د) ئے$$

+ (ب ص - ج د) مای + (د ص - ا م) ۲ ب د + (ج ئے لا) (ا د - ب ج) لا  
اور ابتدائی متغیروں لا، ما کو داخل کرنے سے

$$ھ (لا، ما) = - \frac{1}{p} ت$$

نیز چونکہ مخروطی فا ۶ اور گ کو ان کے مشترک ماسوں کے تقاطع تا نقطہ کرتا ہے اسلئے گ پر کے وہ نقطے جو عیسوی کی اصلوں کے متناظر ہیں وہ ہیں جو اس طور پر متعین ہوتے ہیں۔  
برعکس اس کے عیسوی ۶ ۱۱ ۶ ۱۲ کو ثلاثی متغیروں میں تحویل کرنے سے وہ ہو جاتا ہے

$$(ا لا + ب م + ج ئے) (ج لا + د م + ص ئے) - (ب لا + ج م + د ئے) = - \frac{1}{p} \text{ فا}$$

جو گ پر کے تمام نقطوں کیلئے قطعی لا ۶، م ۶، ئے ۶ کا لاف ہے۔ فا کی یہ تعین ۶ اور گ کے غیر متغیر طا کے معدوم ہونے کی وجہ سے عمل میں آتی ہے۔  
۲۱۵۔ اب ہم ثنائی نظام کو ثلاثی نظام میں تحویل کرنے کے لئے چند





اور اسلئے

$$\frac{\text{جف}^أ\text{ع}}{\text{جف}^أ\text{لا}} = \frac{\text{جف}^أ\text{ع}}{\text{جف}^أ\text{لا}} + \left( \frac{\text{جف}^أ\text{ع}}{\text{جف}^أ\text{ما}} + \frac{\text{جف}^أ\text{ع}}{\text{جف}^أ\text{لا}} \right) + \frac{\text{جف}^أ\text{ع}}{\text{جف}^أ\text{لا}}$$

$$-2 \left( \frac{\text{جفا}^2}{\text{حق ما}} - \frac{\text{جفا}^2}{\text{جفا لا حق}} \right)$$

$$r = \frac{\text{جف}}{\text{جف} \delta} \left( \frac{\text{جف} \epsilon}{\text{جف} \epsilon} + \frac{\text{جف} \alpha}{\text{جف} \alpha} + \frac{\text{جف} \delta}{\text{جف} \delta} \right)$$

$$- \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\text{جفا}}{\text{حقا}} - 2 \pi (6)$$

جہاں اعلیٰ جفا جفا ہے جفا ۸ - جفا جفا کو خراب کر نیکی لئے استعمال کیا گیا ہے۔

پس چونکہ ۶ کا درجہ ۱۰ اور اسلئے ۶ کا  $\frac{1}{10}$  ۱۰ ہے، ہمیں حال ہونا

$$\frac{\text{جف}^2 \text{ء}}{\text{جف}^2 \text{لا}} = (1-n) \frac{\text{جف}^6}{\text{جف}^4} - 2 \text{ء} \pi (6) \text{ اور اسی طرح}$$

$$\frac{\text{جف}^1}{\text{جف}^2 \text{ لا حفا}} = \frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2 \text{ ما}} (1 - \text{ن}) + \text{ن} \text{ ما}^2 (6)$$

$$\frac{\text{جفا}^2}{\text{جفا}} = \frac{\text{جفا}^2}{(1-n)^2} - \frac{\text{جفا}^2}{(6)\pi 42}$$

اگر استحالة ایسا ہو کہ (۶) مثالاً معدوم ہوتا ہے تو دوسرے  
رتبہ کے تقریقی سروں کے استحالة کے لئے حسب ذیل سادہ قیمتیں ملتی ہیں:-

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}}}{\text{جف}^{\text{ن}}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}}{\text{جف}^{\text{ن}}} \cdot \frac{(1-n)^2}{(1-n)^2} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}}{\text{جف}^{\text{ن}}} \cdot \frac{(1-n)^2}{(1-n)^2}$$

$$\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ۷}} (1 - 0.5)^2 = \frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ۷}}$$

ان قیمتوں سے آسانی کے ساتھ معلوم ہو سکتا ہے

$$\frac{1}{2} (\text{لا جف لا} + \text{ما جف ما}) = \text{ع} = (\text{ان-ا}) (\text{لا جف ع} - \text{ما جف ع})$$

$$+ \frac{\text{ع جف ع}}{\text{جف ع}})$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ ثنائی نظام کا دوسرا استخراج ثنائی نظام کے پہلے قطبی میں مستحیل ہوتا ہے۔

اب ہم ثنائی اور ثنائی متغیروں کے درمیانی ربط پر غور کرتے ہیں اور یہ ثابت کرتے ہیں کہ کثیر درجہ کے بنیادی خواص دونوں نظاموں میں متناظر ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ ہمارے پاس عام طور پر متغیروں کے درمیان تین مساواتیں ہیں

$$\text{لا} = \text{فم} (\text{لا} \text{ ما}) \text{ کما} = \text{فم} (\text{لا} \text{ ما}) \text{ ع} = \text{فم} (\text{لا} \text{ ما})$$

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ان مساواتوں کو شکل

$$\text{لا} = \text{لا} \text{ کما} = \text{لا} \text{ ع} = \text{لا}$$

میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔ لا ما کو ساقط کرنے سے ہمیں لا کما ع میں ایک مساوات ملتی ہے۔ استحالات ثنائی مساوات سے لا کما ع میں ایک اور رشتہ ملتا ہے۔ اس مساوات کی اصل کو وہ دو نقطوں کے تقاطع سے تعبیر ہوگی۔ ان دو تعبیروں میں جس میں ایک تو خط مستقیم پر کے نقطے ہیں اور

دوسرے مخروطی پر کے نقطے ہیں جو مشابہت ہے وہ ہندسہ تحلیلی کے طالب علم پر بخوبی واضح ہوگی۔ ہم ایک ایسی مثال دینگے جس سے یہ مشابہت سمجھ میں آجائے گی۔ ہم ثابت کریں گے کہ کس طرح ع کی ایک دہری اصل سے شش درجہ ہم متغیر کی پچھری اصل حاصل ہوتی ہے

(224)

(شال : غر = ۳) کیونکہ ۳ اور ۶ کے قطبی ثلث کے دو اضلاع مخروطی کو ثلث کے راس پر مل کر ملتے ہیں۔ نیز ۳ و ۶ کے قطب کا قطب ملاں پر ایک نقطہ ہے۔

(۳) جیکو بی کا استحالة - کسی نظام ۳ و ۶ کا جیکو بی

۳ و ۶ کے جیکو بی میں مستحیل ہوتا ہے جہاں ۳ و ۶ کی استحالة شدہ نہیں ہو سکتیں۔ ان استحالاتوں کا ایسا مندرجہ ذیل ہے جسکی وجہ سے

$$\Pi (۱۶) = \Pi (۱۷) = ۰ - \text{کیونکہ}$$

$$\left| \begin{array}{cc} \text{جف ع} & \text{جف ۶} \\ \text{جف لا} & \text{جف ما} \\ \text{جف و} & \text{جف ۷} \\ \text{جف لا} & \text{جف ما} \end{array} \right| = \frac{1}{(۱-ن)(۱-ن')} \left| \begin{array}{cc} \text{ولا ب ما} & \text{ب لا ج ما} \\ \text{ولا ب ما} & \text{ب لا ج ما} \end{array} \right|$$

جہاں ۳ اور ۷ کے درجے ۱ اور ۱ ہیں اور دوسرے تفرقی سروں کو تغییر کرنے کے لئے 'ا' ب 'ج' استعمال کئے گئے ہیں۔ پس

$$\left| \begin{array}{cc} \text{جف ۶} & \text{جف ع} \\ \text{جف لا} & \text{جف ما} \\ \text{جف و} & \text{جف ۷} \\ \text{جف لا} & \text{جف ما} \end{array} \right| = \frac{1}{(۱-ن)(۱-ن')} \left| \begin{array}{cc} \text{ا ب ج} & \text{ا ب ج} \\ \text{ا ب ج} & \text{ا ب ج} \end{array} \right|$$

آخری مقطع اس سے پہلے کے مقطع سے (۲) کے استحالة کے ذریعہ حاصل ہوئے اور آخری صف کو ۴ (۶) سے ضرب دیکر پہلی صف میں جمع کیا گیا ہے اور آخری صف کو ۴ (۷) سے ضرب دیکر دوسری صف میں جمع کیا گیا ہے۔

(۴) عیسوی اور دوسرے ہم رو۔

عیسوی کے استحالة کے لئے ہم جانتے ہیں کہ

$$ن(ن-۱)ھ(۱-۶) = \frac{جف۱ء}{جف۱ء} - \frac{جف۱ء}{جف۱ء} - \left( \frac{جف۱ء}{جف۱ء} \right)$$

$$= ۴(ن-۱) \left\{ \frac{جف۱ء}{جف۱ء} - \frac{جف۱ء}{جف۱ء} \right\} - \frac{جف۱ء}{جف۱ء} \text{ اگر } (۶) = ۰$$

(225) جس سے یہ ثابت ہے کہ ایک منحنی عیسوی مستقیم ہو سکتا ہے ۶ کے لحاظ سے ثابت مخروطی پر کے ماسوں کے قطبوں کا طریق ہے۔

ثنائی ہم رو  
(لا مآ - لا مآ)

کے جواب میں خط

لائے۔ ۱ مامآ + ۱ لا  
ہے جو ثابت مخروطی گ کے لحاظ سے لا مآ + ۱ کے قطبی ہے۔  
اگر دو درجہ

۱ لا + ۲ ب لا مآ + ج مآ ، ۱ لا + ۲ ب لا مآ + ج مآ  
استحالة کے بعد خطوط ۱ اور ۲ ہو جائیں تو جیکو بی ہے (۱ مآ گ)  
ان کے تقاطع کے قطبی خط کو متعین کرتا ہے جو ثابت مخروطی گ کے  
لحاظ سے ہے۔

اگر (۶) = ۰ ، (۷) = ۰ تو ہم متغیر (۱ ، ۲) کے متناظر صریحاً منحنی

$$\frac{جف۱ء}{جف۱ء} + \frac{جف۱ء}{جف۱ء} - \frac{جف۱ء}{جف۱ء} - \frac{جف۱ء}{جف۱ء}$$

مائل ہوتا ہے جیکو صفر کے مساوی رکھنے سے وہ شرط ملتی ہے کہ ۶ اور ۷ کے  
لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی خطوط ثابت مخروطی کے لحاظ سے فردوج  
ہوں۔ اس ہم متغیر کو شکل (۷۶) میں لکھا جاسکتا ہے

کیونکہ  $\Pi(6) \equiv 0$ ،  $\Pi(9) \equiv -$ ۔

۲۱۶۔ جب وقفہ ۲۱۲ کا استعمال جفت درجہ ۲م کے کثیر درجی ف (لا، ما) پر استعمال کیا جاتا ہے تو یہ واضح ہے کہ اس کثیر درجی کی ہمیں ہندسی طور پر ۴م درجہ کے ایک منحنی اور ثابت مخروطی گ کے نقاط تقاطع سے متعین ہونگی۔ اگر کثیر درجی کا درجہ طاق ہے تو استعمال کو عمل میں لانے سے پیشتر اس کا مربع لے لینا چاہئے جیسا کہ پہلے بیان کر دیا گیا ہے۔ تب اسکی اصلیں ہندسی طور پر متناظر منحنی اور ثابت مخروطی کے نقاط تماس سے متعین ہونگی۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ کثیر درجی ۶ (لا، ما) کو مستحیل کرنے میں استعمال کے طریقہ کو بدلنے سے ثلاثی شکلوں کی ایک تعداد حاصل ہو سکتی ہے نیز اگر ان شکلوں میں سے ایک ۶ ہو تو ۶ + ۶ = ۱۲۔

بھی (جیسے اب فہم کے سراضیاری ہیں) ۶ (لا، ما) کا ایک استعمال ہوگا کیونکہ یہ شکل ابتدائی تغیروں کو داخل کرنے سے پھر کثیر درجی ۶ (لا، ما) کی طرف رجعت کرے گی۔ مزید بریں ہر ممکن استعمال قبل الذکر شکل میں شامل ہے کیونکہ جیسا ہم دیکھ چکے ہیں استعمال کے عمل کی تکمیل میں تبدیلی اس وجہ سے پیدا ہوتی ہے کہ ایک جزو ضربی ۴ لا، ما کی بجائے ۴ لا، یا ۴ لا، رکھا جاسکتا ہے اور اسلئے دو نتیجوں کا فرق ایک استحالاتی ایسا جملہ ہوتا ہے جس کا جزو ضربی گ ہے۔ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ

ان متعدد ثلاثی شکلوں کے درمیان ہمیشہ ایک اور صرف ایک شکل ایسی ہے کہ  $\Pi(6) \equiv 0$ ۔ اور اسلئے جیسا کہ ہم ثابت کر چکے ہیں یہ شکل ایسی ہے کہ گ کے ساتھ ملکر اسکے غیر متغیر اور ہم متغیر



عہدہ 'جہ' ضد '.....' کی قیمتوں کے ایک خاص نظام کو کسی طرح ترتیب دینے سے سر 'جہ' ضد '.....' کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔ چونکہ عہدہ 'جہ' ضد '.....' میں سے ہر ایک اکائی کے مساوی ہو سکتا ہے اسلئے

$$\text{عہدہ } ۱ = ۶ \text{ م } ۱ \text{ جہ ضد } \dots \dots \dots \text{جہ ضد } \dots \dots \dots$$

$$\text{عہدہ } ۲ = ۶ \text{ م } (۱-۱) \text{ جہ ضد } \dots \dots \dots \text{جہ ضد } \dots \dots \dots$$

$$(\text{عہدہ } ۱ - \text{عہدہ } ۲) = ۶ \text{ م } (۱-۱) \text{ جہ ضد } \dots \dots \dots \text{جہ ضد } \dots \dots \dots$$

ہیں اگر  $\Pi (۶) =$  تو وہ تمام سر 'جہ' ضد '.....' مساوی ہیں جو ۳۱ کی بجائے

۲۱ رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ اب چونکہ  $۱ = ۱$ ،  $۲ = ۱$ ،  $۳ = ۱$ ،  $۴ = ۱$ ،  $۵ = ۱$ ،  $۶ = ۱$  (224)

نیسے تاہم جو مساوی ہونے چاہئیں ثنائی شکل ۶ میں ایک ہی رقم

کے مستعمل ہونے سے پیدا ہوتے ہیں اور اسلئے ہم صرف ایک طریقہ سے ایسی ترکیب لے سکتے ہیں کہ یہ سر مساوی ہوں۔ مثلاً چار درجہ ۱ کو مستعمل

کرنے میں رقم  $۱$ ،  $۲$ ،  $۳$ ،  $۴$ ،  $۵$ ،  $۶$  بدل کر  $۱$ ،  $۲$ ،  $۳$ ،  $۴$ ،  $۵$ ،  $۶$  ہو جاتی ہے

جہاں  $۱$  اور  $۲$  صرف رشتہ  $۱ = ۱ + ۱$ ،  $۲ = ۱ + ۱$  پورا کرتے ہیں ورنہ اختیار ہیں۔

لیکن اگر  $\Pi (۶) =$  تو جیسے اوپر بیان ہوا  $۱ = ۱$  اور اسلئے  $۱ = ۱$ ،  $۲ = ۱$ ،  $۳ = ۱$ ،  $۴ = ۱$ ،  $۵ = ۱$ ،  $۶ = ۱$



یہ دیکھنے کے بعد  $\epsilon$  کو صرف ایک طریقہ پر اس طرح مستحیل کیا جاسکتا ہے کہ  
 $\Pi(6) \equiv 0$ ۔ اب ہم  $\epsilon$  اور  $\epsilon$  کے سروں میں رشتہ دریافت کر سکتے ہیں  
 جو بہت سادہ ہے۔ سروں کے لئے ایک دوسری تقسیم اختیار کر دو اور

$$\text{فرض کر دو کہ } \epsilon \equiv \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} + \dots \text{ بد لکر}$$

$$\epsilon \equiv \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} + \dots$$

ہو جاتا ہے۔  $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$  کے سرکا حریفی حصہ  $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \equiv \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$  ع<sub>۱</sub> ع<sub>۲</sub> ع<sub>۳</sub> ع<sub>۴</sub> ع<sub>۵</sub> ع<sub>۶</sub>

اور چونکہ  $\Pi(6) \equiv 0$ ۔ اور اسلئے

$$\text{ع}_1^2 = 2(1-n) \text{ ع}_1 \text{ ع}_2 \text{ ع}_3 \text{ ع}_4 \text{ ع}_5 \text{ ع}_6 = 2(1-n) \text{ ع}_1 \text{ ع}_2 \text{ ع}_3 \text{ ع}_4 \text{ ع}_5 \text{ ع}_6 = 2(1-n) \text{ ع}_1 \text{ ع}_2 \text{ ع}_3 \text{ ع}_4 \text{ ع}_5 \text{ ع}_6$$

$$\text{اسلئے } \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \text{ ع}_1 \text{ ع}_2 \text{ ع}_3 \text{ ع}_4 \text{ ع}_5 \text{ ع}_6 = \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \text{ ع}_1 \text{ ع}_2 \text{ ع}_3 \text{ ع}_4 \text{ ع}_5 \text{ ع}_6$$

$$= \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \text{ ع}_1 \text{ ع}_2 \text{ ع}_3 \text{ ع}_4 \text{ ع}_5 \text{ ع}_6$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \text{ کے سرکا حریفی حصہ } \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

اسی طریقہ سے بالعموم ثابت کیا جاسکتا ہے کہ  $\epsilon$  میں کی کسی رقم کے

سرکا حریفی حصہ  $\epsilon$  میں کی اُس رقم کے جس سے  $\epsilon$  والی رقم بذریعہ استحالة

پیدا ہوتی ہے سر کے حریفی حصہ کے مساوی ہے۔

مثلاً آچھ درجی کے لئے

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \text{ وغیرہ۔}$$

اور آٹھ درجی کے لئے



جہاں  $n, n', n''$  علی الترتیب  $n, n', n''$  کے درجے ہیں۔

(۲)

$$\left| \begin{array}{ccc} \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \end{array} \right| \frac{1}{(n-1)(n'-1)(n''-1)} = \text{ع} \text{چوک}$$

$$\frac{1}{(n-1)(n'-1)(n''-1)} = \Delta \text{چہ} \Delta \text{چہ} \Delta \text{چہ} \text{ع}$$

$$\text{جہاں } \Delta \text{چہ} = \Delta \text{چہ} + \Delta \text{چہ}$$

(۳) اسی طرح ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{ع} \text{چوک} = \frac{1}{(n-1)(n'-1)(n''-1)} \Delta \text{چہ} \Delta \text{چہ} \Delta \text{چہ} \text{ع}$$

چونکہ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) کے بائیں طرف والے عامل غیر متغیر عامل ہیں اس لئے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ شکل (ع، ب، ج) والی علامتوں کی کسی تعداد کا حاصل ضرب شنائی نظام میں غیر متغیر عاملوں کے حاصل ضرب میں سمیل ہوتا ہے اور اس لئے شنائی نظام کے تمام ہم روشنائی نظام کے بھی ہم رو ہیں۔

(229) اس کے برعکس یہ دیکھنے کے لئے کہ شنائی نظام کے تمام ہم روشنائی نظام کے بھی ہم رو ہیں، ہم یہ ثابت کریں گے کہ متغیروں کے جنٹوں کی جگہاں بنادینے کے بعد شکل (ع، ب) والے عاملوں کی کسی تعداد کا حاصل ضرب شکل (ع، ب، ج) والے عاملوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ یہاں بہ مقدار تک چ سے متعلق ہے اور ایک عددی جزو ضربی سے مضروب ہے۔

مساوات (۲) کی رو سے (ع، ب، ج)، (ج، ض، ع)، (ع، چ، ع) چوک



اور  $\Delta$  کو پھیلانے کے بعد اس میں  $\Delta$  اور  $\Delta$  کی بجائے  $\Delta$

رکھا جاسکتا ہے اور اسلئے حاصل  $\Delta$  کی بجائے  $\Delta$  (۲-۱) (۳-۱) رکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح جب عمل کی تکمیل کی جاتی ہے اور تمام متغیروں کے جٹوں کو یکساں بنا دیا جاتا ہے تو اوپر کی مساوات میں بائیں طرف والی رقم

$$= \frac{2-1}{1-1} (عہ) (عہ) = 1$$

(230) اب یہ علامت دیکھا جاسکتا ہے کہ شکل (عہ) والے عاملوں کی کسی تعداد کا حاصل ایک عددی جزو ضربی کے لئے وہی ہوتا ہے جو شکل (عہ) کے لئے متناظر عاملوں کا۔ یہاں  $\Delta$  کے لئے متعلق ہے اور  $\Delta$  کی کوئی دو قسمیں مساوی نہیں ہیں۔ پس یہ ثابت ہو گیا کہ شنائی نظام کے تمام ہم روشنائی نظام کے بھی ہم رو ہیں۔

۲۱۷۔ چنانچہ  $\Delta$  اور  $\Delta$  درجی کا مجموعہ نظام۔ اس شنائی نظام کو مستحیل کرنے سے دو مخروطیوں اور ایک خط سے ترکیب یافتہ ایک شنائی نظام ملتا ہے اور سادگی کی خاطر ہم فرض کریں گے کہ یہ مخروطی اپنے مشترک خود مزدوج مثلث کے حوالے سے لئے گئے ہیں۔ چار درجی اور دو درجی کی شنائی شکلوں کو علی الترتیب  $\Delta$  اور  $\Delta$  سے تعبیر کرنے اور ایک خیال رکھنے سے کہ استحالیہ ایسا ہے جسکے لئے  $\Delta = (6) = 0$  یعنی ایسا ہے کہ  $\Delta$  کی محاسبات مساوات میں تفرقی علامتیں رکھنے اور  $\Delta$  پر عمل کرنے سے حاصل متماثلہ صفر ہو جاتی ہے یعنی استحالیہ ایسا ہے کہ  $\Delta + 6 = 0$  کے معنی میں  $\Delta$  کا سرمتماثلہ صفر ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$6 = \Delta + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 0$$

گ = لا + ما + ہئے ' ب ج + ج + د + ب = ع '   
 ل = ع + لا + بہما + جہئے ' ب ج = ع '   
 اب ہم اس نظام کے خطی ہم متغیر معلوم کریں گے۔ چونکہ گ کے لمبا   
 سے ل کے قطب کے محدود ع ' بہ ' جہیں اس لئے اس نقطہ کا قطبی   
 لمبا ع کے یہ ہے

د ع + لا + ب بہما + ج جہئے = ہ   
 جو پہلا ہم متغیر ہے۔ اسی طرح ہ کے ساتھ سلوک کرنے سے چونکہ لمبا   
 گ کے اس کے قطب کے محدود د ع ' ب بہ ' جہیں اس لئے اس   
 نقطہ کا قطبی لمبا ع کے ' د ع + لا + ب بہما + ج جہئے = ن ہے جو   
 دوسرا ہم متغیر ہے (دیکھو صفحہ ۱۵-۱۳) ان سے زیادہ غیر تابع خطی ہم متغیر   
 اس طریقہ سے اخذ نہیں کئے جاسکتے کیونکہ اس طور پر اخذ کردہ تیسرا ہم متغیر   
 ہوگا

د ع + لا + ب بہما + ج جہئے = د (ب ج - ع) ع + لا + ب (ج د - ع) بہما

+ ج (د ب - ع) جہئے

اور اس لئے یہ ل اور ہ کی رقوم میں ع ل - ع ہ میں بیان ہو سکتا   
 ہے۔ لیکن تین اور خطی ہم متغیر ل ' م ' ن مائل کئے جاسکتے ہیں اگر   
 ہم ل ' م ' ن کے قطب لمبا گ کے لیں اور انہیں سے دو دو کو ملا لیں   
 یہ نظام ان جیکو بیوں

(23)

جے (م ' ن ' گ) جے (ن ' ل ' گ) جے (ل ' م ' گ)

سے بیان ہو سکتا ہے۔ پس ہمیں چاہیے ہم متغیر مائل ہوئے ل ' م ' ن اور ل '   
 م ' ن۔ دیگر تمام ہم متغیر ان میں تحویل ہو سکتے ہیں مثلاً

$$\text{تن} = \text{ا}^{\text{ن}} \text{ع} + \text{ب}^{\text{ن}} \text{ع} + \text{ج}^{\text{ن}} \text{ع}$$

$$= \text{ا}^{\text{ن}-\text{ا}} (\text{بج} - \text{ع}) + \text{ع} + \text{ب}^{\text{ن}-\text{ب}} (\text{ا} - \text{ج}) + \text{ج} + \text{ج}^{\text{ن}-\text{ج}} (\text{ا} - \text{ب}) - \text{ع}$$

$$= \text{ع}^{\text{ن}-\text{ا}} - \text{ع}^{\text{ن}-\text{ب}} - \text{ع}^{\text{ن}-\text{ج}}$$

نیز  
کیونکہ  
 $\text{ب}^{\text{ن}} \text{ع} + \text{ا}^{\text{ن}} \text{ع} + \text{ج}^{\text{ن}} \text{ع} = \text{ا}^{\text{ن}} \text{ع} + \text{ب}^{\text{ن}} \text{ع} + \text{ج}^{\text{ن}} \text{ع}$   
 $\text{بج} = \text{ا} + \text{ع} \text{، } \text{ا} = \text{ب} + \text{ع} \text{، } \text{ا} - \text{ب} = \text{ج} + \text{ع}$

اسی طرح  $\text{ب}^{\text{ن}} \text{ع} + \text{ا}^{\text{ن}} \text{ع} + \text{ج}^{\text{ن}} \text{ع} = \text{ا}^{\text{ن}} \text{ع} + \text{ب}^{\text{ن}} \text{ع} + \text{ج}^{\text{ن}} \text{ع}$  کو اس شکل  $\text{ا}^{\text{ن}} \text{ع} + \text{ب}^{\text{ن}} \text{ع} + \text{ج}^{\text{ن}} \text{ع}$  میں تبدیل کیا جاسکتا ہے اور دیگر تبدیلیات میں جو درپیش ہوتے ہیں کوئی مشکل نہیں ہوتی۔

جب ان چہم متغیروں کو مستحیل کیا جاتا ہے تو ان سے ثنائی نظام میں چہم دو درجہ ہر متغیر حاصل ہوتے ہیں۔  
اس نظام کے چہم غیر متغیر ہیں لیکن ان میں سے صرف تین خاص غیر متغیر ہیں۔ ان کو حاصل کرنے کے لئے فرض کرو کہ وہ شرط کہ  
 $\text{ا}^{\text{ن}} + \text{ب}^{\text{ن}} + \text{ج}^{\text{ن}} = \text{ن}$  ضروری ہے کو مس کرے یہ ہے

$$\text{ا}^{\text{ن}} + \text{ب}^{\text{ن}} + \text{ج}^{\text{ن}} = \text{ن} \text{، } \text{ا}^{\text{ن}-\text{ا}} + \text{ب}^{\text{ن}-\text{ب}} + \text{ج}^{\text{ن}-\text{ج}} = \text{ن} - \text{ا} - \text{ب} - \text{ج} = 0$$

اسلئے پانچ غیر متغیر  $\text{ا}^{\text{ن}}$ ،  $\text{ب}^{\text{ن}}$ ،  $\text{ج}^{\text{ن}}$ ،  $\text{ا}^{\text{ن}-\text{ا}}$ ،  $\text{ب}^{\text{ن}-\text{ب}}$  حاصل ہوتے ہیں جہاں  
 $\text{ا}^{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{ن}-\text{ا}} + \text{ب}^{\text{ن}-\text{ب}} + \text{ج}^{\text{ن}-\text{ج}}$  اور انہیں سے صرف تین غیر تابع ہیں کیونکہ  
 $\text{ا}^{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{ن}-\text{ا}} (\text{بج} - \text{ع}) + \text{ع} + \text{ب}^{\text{ن}-\text{ب}} (\text{ا} - \text{ج}) + \text{ج} + \text{ج}^{\text{ن}-\text{ج}} (\text{ا} - \text{ب}) - \text{ع}$





بیان کریں گے۔ مسئلہ اس شرط کے معلوم کر نیکی معادل ہے کہ لی چار  
نقطوں کے کسی ایک نقطہ میں سے گزرے اور بہت  
آسانی کے ساتھ یہ شرط معلوم کرنے سے حل ہو جاتا ہے کہ نظام ع  
+ غہ گ کا صرف ایک مخروطی کھینچا جاسکتا ہے جو لی کو مس کرے۔  
اب اگر لی ع + غہ گ کو مس کرے تو

$$\text{غہ}^2 (\text{ع}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2) - \text{غہ} (\text{ا}^2 \text{ع}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2) + \text{ب} \text{ج} \text{ع}^2 + \text{ا}^2 \text{ب} \text{ج}^2 = 0$$

$$\text{یا } \text{ب} \text{ج} \text{ع}^2 - \text{د} \text{غہ}^2 + \text{د} \text{ع}^2 + \text{د} \text{ب}^2 = 0$$

اور اگر اس دو درجی کا میٹر کا ہو تو

$$\text{کا} = \text{د}^2 - \text{د}^2 - \text{د}^2 - \text{د}^2 - \text{د}^2 - \text{د}^2$$

رابطہ د = کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ خط لی مخروطیوں کا اور

ک سے موسیقی نسبت میں قطع ہوتا ہے۔

اب ہم ثنائی نظام کے دو درجی ہم متغیروں سے ثنائی نظام کے  
چار درجی ہم متغیر معلوم کریں گے نظام میں تین دو درجی ہم متغیر ہیں یعنی

جیکو بی

جے (ل، ع، گ) جے (م، ع، گ) جے (ن، ع، گ)  
اور نیز تین مخروطی ہیں

(288)

جے (ل، ف، گ) جے (م، ف، گ) جے (ن، ف، گ)

جہاں ا، ب، ج، د، ع، ف، گ موسیقی مخروطی ف بہ تبدیل علامت ہے۔

یہ تین مخروطی آسانی کے ساتھ تحویل ہو جاتے ہیں کیونکہ

جے (ل، ف، گ) = جے (م، ع، گ) جے (م، ف، گ) = جے (ن، ع، گ)

جے (ن، ف، گ) = جے (م، ع، گ) جے (ل، ع، گ)

اسلئے صرف تین خاص دو درجی ہم متغیر ہیں اور اسلئے ثنائی نظام کے صرف

تین خاص چار درجی ہم تغیر ہیں۔  
اس دفعہ کو ختم کرنے سے پیشتر ہم یہ شکلیں بیان کرینگے جو  
مخروطیوں کے اور گے کی معمولی مساواتیں یعنی  

$$6 = (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23+24+25+26+27+28+29+30+31+32+33+34+35+36+37+38+39+40+41+42+43+44+45+46+47+48+49+50+51+52+53+54+55+56+57+58+59+60+61+62+63+64+65+66+67+68+69+70+71+72+73+74+75+76+77+78+79+80+81+82+83+84+85+86+87+88+89+90+91+92+93+94+95+96+97+98+99+100)$$

کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔  
وہ شرط کہ خط لے = ع + ب + ج + د + ہ + ز + ح + ط + ی + ک یا اسکی  
عامی مساوات کو کس کرے اب یہ ہے

$$3 - ع + ف + غ = ح = ' \text{ جہاں}$$

$$3 = (ج ص - د) ع + (ا ص - ج) ب + (ا ج - ب) جہ +$$

$$+ 2 (ب ج - ا د) ب ج + 2 (ب د - ج) ج ع + 2 (ج د - ب ص) ع ب +$$

$$ف = ص ع + ۴ ج ب + ۴ ج د - ۴ ب ج + ۲ ج ج ع - ۴ د ع +$$

$$3 = ۴ (ج ع - ب)$$

نیز ح، ف، غ، مخروطی متصور ہوں تو انکا جیکوبی کیا ہے۔ اور

$$ع = ۴ - ع = ۴ ب ج + ۴ ج د - ۴ ب ج + ۲ ج ج ع - ۴ د ع + 3 = ع + 3$$

جہاں ع اور جے حسب معمول چار درجی کے غیر تغیر ہیں۔

۲۱۸۔ چہ درجی کے صدر ہم رو۔ کثیر درجی کی بعد والی جفت شکل خچر

شانی چہ درجی ۶ ہے ہم مختصر طور پر یہ بتائینگے کہ اسکے غیر تغیر اور دو صدر ہم تغیر کس طرح  
ایک کعبی اور مخروطی کے مخلوط تلاشی نظام سے اخذ کئے جاسکتے ہیں۔

یہ دو ہم تغیر چار درجی ع (بسا فائق سر لہ) ۴ - ۴ لہ + ۴ لہ = ع ہے

اور دو درجی ل = ع (۴) ہیں۔ کیونکہ اگر ہم انکو ایک مخلوط نظام کے



$$\begin{aligned} & \frac{1}{11} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} \\ & \frac{1}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \\ & \frac{1}{13} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} \end{aligned}$$

نیز

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \end{array} \right| = (6)$$

اب ع (۶) پر  $\pi$  سے عمل کرنے سے چھ درجی کا حسب ذیل

دو درجی غیر متغیر حاصل ہوتا ہے

$$ع = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \frac{1}{28} - \frac{1}{36} + \frac{1}{42} - \frac{1}{50} + \frac{1}{55} - \frac{1}{66} + \frac{1}{78} - \frac{1}{90} + \frac{1}{110} - \frac{1}{132} + \frac{1}{154} - \frac{1}{180} + \frac{1}{210} - \frac{1}{242} + \frac{1}{273} - \frac{1}{306} + \frac{1}{340} - \frac{1}{378} + \frac{1}{420} - \frac{1}{462} + \frac{1}{506} - \frac{1}{550} + \frac{1}{600} - \frac{1}{646} + \frac{1}{693} - \frac{1}{744} + \frac{1}{798} - \frac{1}{854} + \frac{1}{910} - \frac{1}{966} + \frac{1}{1023} - \frac{1}{1080} + \frac{1}{1140} - \frac{1}{1200} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{1380} - \frac{1}{1440} + \frac{1}{1500} - \frac{1}{1560} + \frac{1}{1620} - \frac{1}{1680} + \frac{1}{1740} - \frac{1}{1800} + \frac{1}{1860} - \frac{1}{1920} + \frac{1}{1980} - \frac{1}{2040} + \frac{1}{2100} - \frac{1}{2160} + \frac{1}{2220} - \frac{1}{2280} + \frac{1}{2340} - \frac{1}{2400} + \frac{1}{2460} - \frac{1}{2520} + \frac{1}{2580} - \frac{1}{2640} + \frac{1}{2700} - \frac{1}{2760} + \frac{1}{2820} - \frac{1}{2880} + \frac{1}{2940} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{3060} - \frac{1}{3120} + \frac{1}{3180} - \frac{1}{3240} + \frac{1}{3300} - \frac{1}{3360} + \frac{1}{3420} - \frac{1}{3480} + \frac{1}{3540} - \frac{1}{3600} + \frac{1}{3660} - \frac{1}{3720} + \frac{1}{3780} - \frac{1}{3840} + \frac{1}{3900} - \frac{1}{3960} + \frac{1}{4020} - \frac{1}{4080} + \frac{1}{4140} - \frac{1}{4200} + \frac{1}{4260} - \frac{1}{4320} + \frac{1}{4380} - \frac{1}{4440} + \frac{1}{4500} - \frac{1}{4560} + \frac{1}{4620} - \frac{1}{4680} + \frac{1}{4740} - \frac{1}{4800} + \frac{1}{4860} - \frac{1}{4920} + \frac{1}{4980} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{5100} - \frac{1}{5160} + \frac{1}{5220} - \frac{1}{5280} + \frac{1}{5340} - \frac{1}{5400} + \frac{1}{5460} - \frac{1}{5520} + \frac{1}{5580} - \frac{1}{5640} + \frac{1}{5700} - \frac{1}{5760} + \frac{1}{5820} - \frac{1}{5880} + \frac{1}{5940} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{6060} - \frac{1}{6120} + \frac{1}{6180} - \frac{1}{6240} + \frac{1}{6300} - \frac{1}{6360} + \frac{1}{6420} - \frac{1}{6480} + \frac{1}{6540} - \frac{1}{6600} + \frac{1}{6660} - \frac{1}{6720} + \frac{1}{6780} - \frac{1}{6840} + \frac{1}{6900} - \frac{1}{6960} + \frac{1}{7020} - \frac{1}{7080} + \frac{1}{7140} - \frac{1}{7200} + \frac{1}{7260} - \frac{1}{7320} + \frac{1}{7380} - \frac{1}{7440} + \frac{1}{7500} - \frac{1}{7560} + \frac{1}{7620} - \frac{1}{7680} + \frac{1}{7740} - \frac{1}{7800} + \frac{1}{7860} - \frac{1}{7920} + \frac{1}{7980} - \frac{1}{8040} + \frac{1}{8100} - \frac{1}{8160} + \frac{1}{8220} - \frac{1}{8280} + \frac{1}{8340} - \frac{1}{8400} + \frac{1}{8460} - \frac{1}{8520} + \frac{1}{8580} - \frac{1}{8640} + \frac{1}{8700} - \frac{1}{8760} + \frac{1}{8820} - \frac{1}{8880} + \frac{1}{8940} - \frac{1}{9000} + \frac{1}{9060} - \frac{1}{9120} + \frac{1}{9180} - \frac{1}{9240} + \frac{1}{9300} - \frac{1}{9360} + \frac{1}{9420} - \frac{1}{9480} + \frac{1}{9540} - \frac{1}{9600} + \frac{1}{9660} - \frac{1}{9720} + \frac{1}{9780} - \frac{1}{9840} + \frac{1}{9900} - \frac{1}{9960} + \frac{1}{10000}$$

اور اسلئے

$$\pi = \left\{ ع (6) + \frac{1}{4} ع_4 گ \right\} =$$

نیز  $\pi$  جے (۶) = ل استعمال کے بعد ل ہو جاتا ہے۔

پھر، اگر ہم

$$ع (6) + \frac{1}{4} ع_4 گ - ل_4 گ$$

کا میز بنائیں تو ہمیں

$$۲ ل_۲ - ع_۴ ل_۴ + ع_۴$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ع اور ع (۶) کے غیر متغیر چھ درجی کے



۲۱۹۔ جیکو بی کی ہندسی تعبیر۔ اس دفعہ میں ہم دو منحنی دریا کرتے ہوئے جو ثابت مخروطی گ کو ایسے نقطوں میں قطع کرتا ہے جو بی کے درجہ کے دو کثیر درجیوں  $f$  اور  $p$  کے جیکو بی کی اصولوں کو تعبیر کرتے ہیں  $\frac{p}{f}$  کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے اور پھر تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(286)

$$\text{جے (ف، پ)} = \frac{f}{p} = \frac{f}{p} \cdot \frac{1}{1} = \frac{f}{p} \cdot \frac{1}{(لا - عمر)}$$

اب ثنائی متغیروں کو ثلاثی متغیروں میں تبدیل کرنے سے استحالات شدہ جے (ف، پ) ہو جاتا ہے

$$\text{جے (ف، پ، ت...ت)} = \frac{f}{p} \cdot \frac{1}{t} = \frac{f}{p} \cdot \frac{1}{(لا - عمر)}$$

جہاں  $ت = لا - عمر + عمر$  اور  $ف = (عمر) =$

مربعات منحنی جے، نقاط  $f = 0$  پر گ کے ماسوں کے تمام نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے۔ مزید بریں  $f$  اور  $p$  کا باہمی تبادلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ منحنی جے، نقاط  $p = 0$  پر گ کے ماسوں کے تقاطع میں سے گزرتا ہے۔ اس تبادلہ سے جے صرف اپنی علامت بدلتا ہے۔ پس یہ منحنی جے دو حالت کثیر الاضلاع کے  $n$  (ن - ۱) ماسوں میں سے گزرتا ہے اور مخروطی گ کو  $2$  (ن - ۱) نقطوں میں قطع کرتا ہے جو مساوات جے (ف، پ) سے متعین ہوتے ہیں۔ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ منحنی جے کی مساوات نہیں بدلتی جبکہ  $p$  کی بجائے  $f$  +  $p$  درج کیا جاتا ہے جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ

ان کثیر الاضلاعوں کی تعداد لامتناہی ہے جو گ کو مانٹ کرتے ہیں اور جے کے اندر دلتی ہیں۔ انکے ضلعوں کے نقاط تماس مسادات لہ فہ + پہ + سے متعین ہوتے ہیں جہاں لہ کوئی قیمت اختیار کر سکتا ہے۔ نیز (ن - ۱) ویر درجہ کا منفی جے ۲ (ن - ۱) جیکو بی نقطوں اور ایک مانٹ کثیر الاضلاع کے  $\frac{(ن - ۱)}{۲}$  راسوں سے پوری طرح مقرر ہو جاتا ہے کہونکہ وہ

$$\frac{(ن - ۱)(۲ + ن)}{۲} \text{ اختیاری نقطوں سے متعین ہونا ہے۔}$$

## مثالیں

۱۔ اگر چار درجی ۶ میں ایک دوہرا جزو ضربی ہو تو ثابت کرو کہ یہ جزو ضربی، ھلا کا ایک دوہرا جزو ضربی ہے اور بتاؤ کہ گ کے دوہرا درجی اجزائے ضربی حقیقی اصلیں رکھتے ہیں جبکہ ۶ کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں یا سب سب خیالی، نیز یہ کہ صرف ایک جزو ضربی حقیقی اصلیں رکھتا ہے جب ۶ کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہوں۔

۲۔ اگر چار درجی کا ایک جزو ضربی مربع ہو تو ہندسی طور پر ثابت کرو کہ یہ جزو ضربی، ہم متغیر گ کا پانچ گن جزو ضربی ہے۔ غرضی گ پر وہ نقطہ معلوم کرو جو مسادات گ = کی بقیہ اصل کے جواب میں ہے۔

(237) ۳۔ ثابت کرو کہ چار درجی فہ (لا) کے چہ درجی ہم متغیر کے دو درجی اجزائے ضربی جیکو اصلوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہو

$$\frac{(لا - عم۱)}{(لا - عم۲)} + \frac{(لا - عم۱)}{(لا - عم۲)}$$

میں لکھے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ  $ت = لا - عم + عا$  ہے

تب 
$$\frac{ت}{(عم)} + \frac{ت}{(عم)} + \frac{ت}{(عم)} + \frac{ت}{(عم)} \equiv \text{یولر کے مسئلہ}$$

لیکن مخروطی ک پر کے نقطوں عم، عم، عم، عم کے جواب میں خود مزدوج

مثلث کے اضلاع اس چار ضلعی کے وتر ہیں جو ماسوں ت، ت، ت، ت سے بنتا ہے اور اسلئے انہیں سے ایک ضلع کی مسادات ہے

$$\frac{ت}{(عم)} + \frac{ت}{(عم)} = \frac{ت}{(عم)} + \frac{ت}{(عم)} = \frac{ت}{(عم)} + \frac{ت}{(عم)}$$

اب متغیروں کے ثنائی نظام پر عود کرنے سے مطلوبہ شکل حاصل ہو جاتی ہے

۴۔ دفعہ ۱۶ کی طرح چار درجہ ۶ کو مخروطی ک کے ان ماسوں کو معلوم کرنے سے جہاں ۶ اس سے ملتا ہے تحلیل کرو جبکہ ۶ اور ک کو مربعوں کے مجموعوں کے طور پر بیان کیا گیا ہے۔

۵۔ وہ شرط معلوم کرو کہ لہ ۶ + مہ و دو درجہ اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکے جہاں ۶ اور و ثنائی چار درجہ ہیں۔

ثلاثی متغیروں میں تحلیل کرنے سے اس صورت میں نہیں حاصل ہوتا ہے

$$لہ ۶ + مہ و + نہ ک \equiv (عم) + (عم) + (عم) + (عم)$$

اسلئے لہ ۶ + مہ و + نہ ک کی ماسی شکل ہے ہر رقم معدوم ہونی چاہئے۔ اس طرح لہ ۶، مہ، نہ، نہ، نہ، نہ کو ساقط کرنے کے لئے چہ مساداتیں ملتی ہیں۔ پس مطلوبہ شرط متعین ہو جاتی ہے۔

۶۔ اگر ۶، و، اور ط تین ثنائی چار درجہ ہوں تو ثابت کرو کہ چار چار درجہ ایسے معلوم کئے جاسکتے ہیں کہ

$$لہ ۶ + مہ و + نہ ط \equiv (ع) لا + ۲ + لا + مہ + مہ$$

ثلاثی متغیروں میں تحلیل کرنے سے یہ ثابت کرنا ہے کہ چار خطوط ایسے معلوم کئے جاسکتے ہیں کہ





کی غیر موسیقی نسبت کے مساوی ہے جہاں ت اور ت نقطہ د پر ع اور ک کے ماس ہیں چونکہ یہ غیر موسیقی نسبت وہی ہے اسلئے دونوں چار درجیوں کے لئے یعنی دے ہوئے چار درجی اور اُس چار درجی کے لئے جسکی اصلیں ک، غ، غ، غ، غ میں مطلق غیر متغیر ایک ہی ماس ہے۔

۸۔ ایک چار درجی کو ایک ایسے چار درجی میں تحویل کرو جسکی تین اصلیں اس کے میز کعبی کی اصولوں کے ساتھ مشترک ہوں۔

اس استحالة کے متعلق گذشتہ مثال سے ہمیں اشارہ ملتا ہے کہ  $ل = ت$  اور  $ل = ت$  رکھا جائے جہاں ت اور ت نقطہ تقاطع د پر جو ضہ کے جواب میں ہے ع اور ک کے ماس ہیں۔ اب چونکہ

ت + غم ت + ت + غم ت + ت + غم ت  
وہ خطوط ہیں جو ضہ متناظر نقطہ کو علی الترتیب ع، ب، جہ کے متناظر نقطوں سے ملاتے ہیں اس لئے ثنائی نظام میں تسخیل کرتے ہوئے ہم رکھتے ہیں

$$\frac{\text{ضہ}}{\text{عہ}} = \frac{\text{ت}}{\text{عہ}} = \frac{\text{لا جف} + \text{ما جف}}{\text{جف لا جف} + \text{جف ما جف}} = \frac{\text{لا جف} + \text{ما جف}}{\text{جف لا جف} + \text{جف ما جف}}$$

$$\frac{\text{لا (ا ضہ + ب ضہ + ج ضہ)}}{\text{لا (لا ضہ + ما ضہ)}} = \frac{\text{لا (ا ضہ + ب ضہ + ج ضہ)}}{\text{لا (لا ضہ + ما ضہ)}}$$

یہ مساوات علی الترتیب  $\frac{\text{ضہ}}{\text{عہ}} = \text{غم} = \text{غم} = \text{غم}$  اور  $\frac{\text{لا}}{\text{عہ}} = \text{بہ}$  رکھنے سے پوری ہوتی ہے۔ سب نما اور شمار کنندہ دونوں کو لا۔ ضہ ماسے تقسیم کر کے ہم عہ = لا۔ ضہ = ما۔ لیتے ہیں اور

$$\frac{\text{ضہ}}{\text{عہ}} = \frac{\text{لا (ا ضہ + ب ضہ + ج ضہ)}}{\text{لا (لا ضہ + ما ضہ)}} = \frac{\text{لا (ا ضہ + ب ضہ + ج ضہ)}}{\text{لا (لا ضہ + ما ضہ)}}$$

$$\text{عہ} = \text{لا۔ ضہ} = \text{ما۔ لیتے ہیں اور}$$



اور یہ کہ  $h$  کی اصلیں خیالی ہیں جبکہ  $e$  کی اصلیں حقیقی ہوں۔

(Dublin Exam. Papers, Bishop Law's Prize, 1879)

فرض کرو کہ ثابت مخروطی گ کے ماس نقاط  $e^1, e^2$  'جہ پر  $h$  'ستہ'  $h$  ہیں۔ تب

$$e^1 h^1 = (f^1 - e^1) h^1 = (f^1 - e^1) h^1$$

$$e^2 h^2 = (f^2 - e^2) h^2$$

فہ کو ماقط کرنے سے گ کی سادات ملتی ہے

$$(e^1 - h^1) h^1 + (e^2 - h^2) h^2 = 0$$

اب خطوط  $h^1, h^2$  'ج ج کی ساداتیں ہیں

(ج -  $e^1$ )  $h^1$  - (ج -  $e^2$ )  $h^2$  = 0 وغیرہ وغیرہ اور وہ نقطے جہاں  $h^1, h^2$  مخروطی گ سے ملتا ہے اس سادات

$$(ج -  $e^1$ )  $h^1$  = (ج -  $e^2$ )  $h^2$  (ج -  $e^2$ )  $h^2$$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس سادات کو مل کرنے سے

$$f^1 = e^1 \text{ اور } (e^1 + ج -  $e^2$ )  $h^2$  =  $e^2$  جہ - جہ -  $e^2$  جہ$$

فہ کی یہ دوسری قیمت گ کی وہ اصل ہے جو  $e^1$  کے (موسیقی طور پر) متناظر ہے۔

پھر  $h^1, h^2$  'ج ج کے نقطہ تقاطع کا قطبی'  $(h^1, h^2)$  کا ہم وصفت کا محور ہے اور اسکی سادات ہے

$$(e^1 - h^1) h^1 + (e^2 - h^2) h^2 = 0$$

یہ خط مخروطی گ کو ان نقطوں پر ملتا ہے جو سادات

$$(e^1 - h^1) h^1 + (e^2 - h^2) h^2 + (e^3 - h^3) h^3 = 0$$

سے متعین ہوتے ہیں اور یہ سادات  $e^1, e^2$  کے صیوی کی سادات ہے۔

۱۰۔ دو درجی اور کبھی کے معوج غیر متغیر کو اصولوں کی رقوم میں تین اجزائے ضربی میں تحلیل کرو اور اسکا ہندسی مفہوم بیان کرو۔  
معوج غیر متغیر اس شکل

و<sup>۲</sup> (ع گ) (دفعہ ۱۹۱)  
میں بیان ہوتا ہے۔ اب ع اور گ کے اجزائے ضربی کو جو موسیقی طور پر ایک دوسرے کے متناظر ہیں متحد کرنے سے ع گ، تین دو درجیوں ل، م، ن کے مائل ضرب کے طور پر بیان ہو سکتا ہے جہاں  
ل = (بہ + جہ - ۲) لا - ۲ (بہ - جہ - ۲) لا + جہ - جہ - ۲ (بہ - جہ - ۲) لا  
اور ایسی ہی قیمتیں م اور ن کے لئے۔

پھر، و<sup>۳</sup> (ل م ن) = ک و ل × و م × و ن  
جہاں ک ایک عددی ضارب ہے۔  
متغیروں کا ثلاثی نظام استعمال کرنے سے اس عمل کی آسانی کیساتھ تکمیل ہو سکتی ہے۔ چنانچہ اس صورت میں اگر  
و = لا - (مہ + نہ) لا + مہ + نہ نہ مہ،

تو و جب کو ل م ن پر ایک عامل سمجھا جائے  
مہ نہ عفی + (مہ + نہ) عفی + عفی عفی طا  
میں تبدیل ہو جاتا ہے کیونکہ جیسا کہ ہم دیکھیں گے ل م ن = اور اسلئے  
طا (ل م ن) = و ط ل × ط م × ط ن  
جہاں ل، کا استحالی میں، م کا م میں، وغیرہ ہوا ہے۔  
پس

(240)

$$\left| \begin{array}{cc|c} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{array} \right| = \text{طا (ل)}$$

یہ مقطع معدوم ہوتا ہے جبکہ ۱ سے نقطوں ۲، ۱ اور ۲، ۱ کے درمیچ کا ایک ماسکہ متعین ہوتا ہو یا جبکہ ۱ اور ۱ سے ایک خط پر چار موسیقی نقطے متعین ہوتے ہوں یا نیز جبکہ مثال ۱ کے خطوط ۱، ۱، ۱، ۱ ج ج میں کا ایک خط اور ۱ کے جواب میں حاصل ہو نیو الا خط ثابت مخروطی ک کے لحاظ سے مزدوج ہوتے ہوں۔ ان صورتوں میں معوج غیر متغیر بھی معدوم ہوتا ہے۔

لیکن یہ آسانی کے ساتھ بتایا جاسکتا ہے کہ  $\pi (ل م ن) =$  اس کے لئے مثال ۱ کی طرح متغیروں کو

$$\text{لا} = (۱-۲) (۱-۲) = (۱-۲) (۱-۲) (۱-۲) (۱-۲) \text{ وغیرہ}$$

میں تبدیل کر دو تو ل بد لکر  $\frac{\text{ما} - ۱}{۱ - ۲}$  ہو جاتا ہے اور  $\pi$  بد لکر

$$(۱-۲) (۱-۲) (۱-۲) (۱-۲) = \left( \frac{\text{جف}^۱}{\text{جف}^۱} + \frac{\text{جف}^۱}{\text{جف}^۱} \right) \frac{\text{جف}^۱}{\text{جف}^۱}$$

$$+ \frac{\text{جف}^۱}{\text{جف}^۱}$$

ہو جاتا ہے اور اس لئے  $\pi (ل م ن) =$

۱۱۔ نقطوں کے دو سلسلے جنہیں تین تین نقطے ہیں جو دو کعبیوں ۱ اور ۱ سے متعین ہوئے ہیں مخروطی ک پر لئے گئے ہیں۔ ان نقطوں پر ک کے حماس کھینچنے سے دو مثلث بنائے گئے ہیں۔ ثابت کر دو کہ وہ مخروطی جو ان دو مثلثوں کو گھیرتا ہے مخروطی ک کو سس کرے گا جبکہ ان دو کعبیوں کا اجتماعی قی معدوم ہو اور یہ کہ ان کا اجتماعیہ پ معدوم ہو گا جبکہ حاط

مخروطی، مخروطی گ کو چار مساوی غیر موسیقی نقطوں پر ملے۔  
۱۲۔ وہ شرط معلوم کرو کہ چار درجی عرب کے کوئی دو دو درجی اجزائے ضربی مثلاً

$$(لا-عہ ما) (لا-پہ ما) (لا-جہ ما) (لا-غہ ما)$$

ایک دئے ہوئے دو درجی لا + لا + ۲ = لا + ما + نہ ما کے ساتھ ملکر درج میں ایک نظام بنائیں۔

ان دو درجیوں کو مستحیل کیا جائے تو ان کے جواب میں حاصل ہونیوالے تین خطوں کو ایک نقطہ پر ملنا چاہئے اور یہ نقطہ، مخروطیوں ع اور گ کے مشترک خود مزدوج مثلث کا ایک رأس ہے۔ ان نقطوں کی ماسی سادا جے (ج، ح، فا) = ۰ ہے اور اس لئے یہ مخلو بہ شرط ہے۔ غہ ع + گ کی ماسی شکل ہے غہ ح + غہ فا + ح ۱ دیکھو دفعہ ۲۱۷۔  
اس شرط کو شکل

$$(لا-جف) = ۲ - \frac{جف}{جفلا} + \frac{جف}{جفلا} = گ$$

میں بھی رکھا جاسکتا ہے جیسا کہ اب ہم بتائینگے۔

$$اگر \quad ط = لا-جف = ۲ - \frac{جف}{جفلا} + \frac{جف}{جفلا}$$

اور گ = ل م ن جب اسکو اسکے دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جائے تو (241)

$$طاگ = ۱ = طال \times طام \times طان$$

کیونکہ ثلاثی متغیروں میں مستحیل کرنے سے

$$طا = (لا-جف) = ۲ - \frac{جف}{جفلا} + \frac{جف}{جفلا}$$

جب اسکو ایک ایسے تفاعل فہ (لا، ما، ہے) پر استعمال کیا جائے کہ ۱۱ = ۰۔  
اب ل، م، ن، تین خطوط ل، م، ن ہو جاتے ہیں جو گ کے لحاظ سے

ایک خود مزدوج مثلث بناتے ہیں اور  $\pi$  ل م ن  $\equiv$  جبکہ کوئی تین خط باہم مزدوج ہوں۔ اس لئے  
 $\pi$  ل م ن  $\pi$  ط ل  $\pi$  ط م  $\pi$  ط ن میں تحویل ہو جائے گی  
 اور ط ل  $\equiv$ ۔ وہ شرط ہے کہ خطوط لہ لا + مہ ما + نہ مے اور ل مخر و ط ل  
 گ کے لحاظ سے مزدوج ہوں یعنی یہ کہ خط لہ لا + مہ ما + نہ مے خط ل  
 کے قطب میں سے گزرے۔ یا وہ شرط ہے کہ ع کے دو دور جی اجزائے  
 ضربی لہ لا + مہ لا + نہ ما کے ساتھ در پیچ میں ایک نظام بنائیں۔  
 ۱۳۔ ثابت کرو کہ چار درجیوں

$$\begin{aligned} & \equiv (م ل + م ل + م ل + م ل) - (م ل + م ل + م ل + م ل) - (م ل + م ل + م ل + م ل) - (م ل + م ل + م ل + م ل) \\ & \equiv (م ل + م ل + م ل + م ل) - (م ل + م ل + م ل + م ل) - (م ل + م ل + م ل + م ل) - (م ل + م ل + م ل + م ل) \\ & (۲) \dots \dots \end{aligned}$$

کے غیر متغیر ایک۔ ہیں۔

(۲) کو مثالی نظام میں تبدیل کرنے سے مخر و ط ل

$$(م ل + م ل + م ل + م ل) - (م ل + م ل + م ل + م ل) - (م ل + م ل + م ل + م ل) - (م ل + م ل + م ل + م ل)$$

$$+ (م ل + م ل + م ل + م ل) - (م ل + م ل + م ل + م ل)$$

مائل ہوتا ہے۔ جہاں  $ک = ع - ع$  کی ایسی قیمت معزز کی گئی ہے کہ

$$\pi (۶) \equiv اور ع و دونوں کے لئے ک وہی ہے۔$$

اختصار کی خاطر ہم لکھتے ہیں

$$ل = م ل + م ل + م ل + م ل \equiv م ل + م ل + م ل + م ل$$

$$ن \equiv م ل + م ل + م ل + م ل \dots (۳)$$

$$اب اگر ۶ + ل = م ل + م ل + م ل + م ل \equiv ل - ن = م ل + م ل + م ل + م ل$$



کا ممیز بنایا جاتا ہے تو

$$\begin{cases} \text{ن عم} - ۲ \text{ م بہ} + \text{ل جم} + ۴ (\text{لہ} + \text{ک}) = ۰ \\ \text{ن عم} - ۲ \text{ م بہ} + \text{ل جم} - ۲ (\text{لہ} + \text{ک}) = \text{ما} = ۰ \\ \text{ن عم} - ۲ \text{ م بہ} + \text{ل جم} + ۴ (\text{لہ} + \text{ک}) = \text{لا} = ۰ \end{cases} \quad (۳۱)$$

اور لا 'ما' سے ساقط کر کے یا مساواتوں (۳۱) کے ساتھ ساداتوں (۳)

کو لیکر ان میں سے لا 'ما' 'ے' 'لی' 'ہ' 'ن' کو ساقط کرنے سے اور  
 لہ + ک = لہ 'ر' رکھنے سے حاصل ذیل کی شکل میں ملتا ہے :-

$$\Delta (\text{لہ}) = \begin{vmatrix} \text{عم} & \text{بہ} & \text{جم} & - & - & + & \text{لہ} \\ & \text{عم} & \text{بہ} & \text{جم} & - & - & \text{لہ} \\ & & \text{عم} & \text{بہ} & \text{جم} & + & \text{لہ} \\ \text{عم} & - & - & ۱ & - & \text{عم} & \text{عم} \\ & + & \frac{۱}{۴} & - & - & \text{بہ} & \text{بہ} \\ - & ۱ & - & - & - & \text{جم} & \text{جم} \end{vmatrix}$$

(242) اگر ہم اسی طرح کا عمل چار درجہ (۱) پر کرتے تو یہی حاصل استقامت  $\Delta (\text{لہ})$

حاصل ہوتا۔ اس صورت میں جو شکل منقطع اختیار کرتا ہے وہ منقطع بالا کی پہلی  
 تین صفوں کو - لہ سے تقسیم کرنے اور پہلے تین ستونوں کو - لہ سے  
 ضرب دینے آخری تین ستونوں کو پہلے لانے اور پہلی تین صفوں کو اوپر لانے  
 سے حاصل ہوتی ہے۔ لہذا دونوں صورتوں میں غیر تغیر ایک ہی ہیں۔

$\Delta (\text{لہ})$  کو پھیلانے کے لئے 'لی' 'ہ' 'ن' کی بجائے انہی تین  
 ساداتوں (۳۱) سے دست بردار اور لا 'ما' 'ے' کو ساقط کر دو حاصل ہوتا ہے :-

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \\ \text{ع} & -\text{ع} & \text{ع} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} + \text{لہ} \end{vmatrix} \quad \text{جہاں } \text{ع} = \text{ع} + \text{ع} + \text{ع} + \text{ع} + \text{ع}$$

اس شطّوع کو پھیلاؤ تو یہ ہو جاتا ہے

$$\int \left\{ (\xi_{r_1} \xi_{r_1'} - \xi_{r_2} \xi_{r_2'}) r + \xi_{r_1'} - \xi_{r_2'} \right\} - \int (\xi_{r_1'} - \xi_{r_2'}) r - \int r$$

$$\begin{array}{|ccc|} \hline r_1 & r_1 & r_1 \\ r_2 & r_2 & r_2 \\ r_3 & r_3 & r_3 \\ \hline \end{array} +$$

یہ خیال رہے کہ جب لہ کی بجائے ل + ک رکھا جاتا ہے تو اس مساوات کی دوسری رقم نہیں ہوتی اور اس کا ہر سر دو نوں چار درجیوں کے لئے ایک ہی ہے جس کی تصدیق بالراست ہو سکتی ہے۔

(Proceedings of the L.M.S.) کامل (Zeuthen) دیکھو زونٹن

جلد دہم صفحہ ۱۹۶۔

۱۴۔ وہ شرط معلوم کرو کہ تین دو درجی خطی استیلاہ سے ایک ساتھ ان شکلوں

جفأف جفأف جفأف  
جفأف جفأف جفأف

میں تھوڑے ہو سکیں۔

$$= \sum_{rr} \sum_{rr} r + \sum_{rr} + \sum_{rr} \sum_{rr} r - \sum_{rr} \sum_{rr} \text{جواب :-}$$

۲۱ فرق = عی جی + عی جی - ۲ بی بی

۱۵۔ - ثبوت کرو کہ مثال ۴ کی شرط دو درجیوں کے حسب ذیل دو جٹوں

کے لیے بھی وہی ہے :-

یہ بھی دہرای ہے :-  
ع ل ا + ۲ ج ل ا م ا + جم م ا ع ل ا + ۲ ج م م ا لا م ا + جم م ا ع ل ا + ۲ ج م م ا لا م ا + جم م ا



(244)

# بیسواں باب

## ابدالات اور گروہوں کا نظریہ

### فصل (۱)۔ ابدالات بالعموم

۲۲۰۔ تعریفات۔ ترقیم۔ اگر ن علامتیں (حروف) لا، لہ، لایہ، لان دی جائیں اور ہر حرف اسی جٹ میں سے کسی کسی حرف سے بدلا جائے۔ اس طرح حاصل، انہی ن حرفوں کی ایک نئی ترتیب ہو تو یہی ترتیب سے دوسری ترتیب پر گزرنے کے عمل کو ہم ابدال سے موسوم کریں گے۔ حروف لا، لہ، لایہ، لان کو ایک دوسرے سے بالکل غیر متجانس خیال کیا جائیگا اور ان کا حوالہ متغیروں یا ابدال سے متاثر غصوں کے نام سے دیا جائیگا۔ اس عمل کو اگر ہم س سے تحریریں تو ابدال میں کو اس صورت ظاہر کیا جاسکتا ہے

$$\left( \begin{array}{c} \text{لا، لہ، لایہ، لان} \\ \text{لایہ، لہ، لا، لان} \end{array} \right) = \text{س}$$

جہاں ہر انہی خط میں ن حرفوں کا ایک ہی جٹ شامل ہوتا ہے اور عمل

اس بات پر مشتمل ہے کہ اوپر کے خط کے ہر حرف کو اس کے تحت نیچے کے خط میں جو حرف ہے اس سے بدلایا جائے۔ یہ عمل متغیروں کے ایک تفاعل نہ (لام، لا، ... لان) پر استعمال کیا جاسکتا ہے اور ایسی صورت میں

حاصل ہونیوالا تفاعل میں نہ، جہاں جہاں نہ میں لا واقع ہوا اسکو

لا میں، لام کو لا میں، لام کو لا میں، وغیرہ بدلنے سے حاصل ہوگا۔

اگر کوئی حرف زیر سمبست ابدال سے اپنی جگہ نہ بدلے تو وہ دو حرف جو ایک ہی انتصابی خط میں ہونگے مماثل ہونگے۔ اب چونکہ لاکے لاحقوں کی ترتیب

کی تعداد صرف ۱ × ۲ × ۳ × ... × n = n! ہے اس لئے مختلف

ابدالات کی اتنی ہی تعداد ممکن ہے اس لئے اود میں وہ ترتیب بھی شامل

ہے جس میں لاحقوں کی ترتیب دونوں افقی سطروں میں یک ہی ہے

یعنی وہ ترتیب جس میں ابدال سے کوئی حرف اپنی جگہ نہیں بدلتا۔ ایسا

(245)

ابدال جس سے کوئی عنصر متاثر نہیں ہوتا متماثل ابدال کہلاتا ہے

یا اکائی ابدال اور اں کو س = ا سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

بالعموم عمل میں سہولت پیدا ہوگی اگر زیر عمل حرفوں کو واحد حروف

۱، ۲، ۳، ... یا صرف اعداد ۱، ۲، ۳، ... سے تعبیر کیا جائے

جہاں حرف لانکاں دیا گیا ہے۔

۲۲۱۔ متذکرہ صدر ترقیم کو سادہ شکل دیجا سکتی ہے۔ مثلاً ابدال

س = (۱ ۲ ۳) (۱ ۲ ۳)

پر غور کرو جس میں پہلی سطر کا ہر حرف اپنے بعد والے حرف سے بدلا گیا

ہے اور آخری حرف ۱ کی جگہ ۱ نے لی ہے۔ ایسے ابدال کو

دائری ابدال کہتے ہیں اور اسکو صرف پہلی سطر کے حرفوں کو خطوط

وعدائی میں بند کرنے سے ظاہر کرتے ہیں اس طرح

س = (۱ ۲ ۳) (۱ ۲ ۳)

یہ واضح ہے کہ میں متعدد مختلف طریقوں سے لکھا جاسکتا ہے اور جو حروف میں شامل ہوتے ہیں انہیں سے کوئی پہلی جگہ اختیار کر سکتا ہے بشرطیکہ دوری ترتیب قائم رہے۔ مثلاً

میں  $\equiv$  (پ ج د ص ف ا)  $\equiv$  (ج د ص ف ا ب)  $\equiv$  (د ص ف ا ب ج د)  $\equiv$  (ف ا ب ج د ص)

اب یہ دیکھنا آسان ہے کہ ہر ابدال کو ایک یا زیادہ دائری ابدالات میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔ کیونکہ کسی ابدال میں کوئی حرف لانے میں اگر اوپر کے خط کے حرف ا کی جگہ ب لے اور ب کی جگہ ج لے اور علیٰ ہذا القیاس تو اس عمل کو جاری رکھنے سے ہم یقیناً ایک حرف (فرض کرو ھ) پر پہنچیں گے جس کی جگہ ا لے لیگا۔ یہاں تک اس عمل کا حاصل دائری ابدال (ا ب ج .... ھ) ہے۔ اگر اس عمل سے تمام حروف ختم نہ ہوں تو ہم باقی ماندہ حروف میں سے ایک حرف لیتے ہیں اور اسی طرح ایک نیا دائری ابدال بناتے ہیں۔ اگر پھر بھی حروف ختم نہ ہوں تو اس عمل کو جاری رکھتے ہیں حتیٰ کہ کوئی حرف باقی نہ رہیں۔

اس طور پر حاصل کردہ مختلف ابدالات کو اگر ہم ج، ج، ج، ج، ج، ج، ج، ج، ج، ج سے تعبیر کریں تو ہم لکھ سکتے ہیں

میں  $\equiv$  ج، ج، ج، ج، ج، ج، ج، ج، ج، ج

اور یہ کہا جاسکتا ہے کہ میں اپنے دائری اجزائے ضربی میں تحلیل ہو چکا ہے۔ ان اجزائے ضربی کو ہم میں کے دورے کیے گئے۔ وہ دورے جنہیں صرف دو حرف شامل ہوں انتقالات کہلاتے ہیں مثلاً ابدال

(246)

میں  $\equiv$  (۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱) (۳ ۲ ۱ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱)

لیا جاتا ہے۔ اوپر کے خط میں ۱ سے شروع کریں تو دوریہ (۳۸۱) فوراً حاصل ہو جاتا ہے اور اسی طرح ۲ سے شروع کریں تو دوریہ (۴۷۵۶۲) ملتا ہے۔ پس

مس  $\equiv (۳۸۱)(۴۷۵۶۲)$   
 یہ ظاہر ہے کہ اعمال کی ترتیب کچھ بھی ہو سکتی ہے کیونکہ کوئی دوریہ کسی دوسرے دوریہ کے عناصر پر متاثر نہیں ہوتا اور اس لئے مس کے اجزائے ضربی کی ترتیب جہیں وہ لکھے گئے ہیں کچھ بھی ہو سکتی ہے۔ اگر صرف عمل اول میں ہی تمام عناصر شامل ہوں تو ابدال خود دائری ہوگا مثلاً

مس  $\equiv (۴۷۵۶۳۲۱) \equiv (۲۱۲۵۷۶۳)$   
 اگر ابدال سے کسی عنصر کا محل غیر متغیر رہے تو اس عنصر کو خود خطوط و حدانی کے اندر بند کیا جاسکتا ہے جب ابدال کو دوریوں کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کیا جائے، یا اسکو بالکل خارج کر دیا جاسکتا ہے مثلاً

مس  $\equiv (۴۷۵۶۳۲۱) \equiv (۲۵۱۳۶۳۱)(۶۲)(۵)$

یہاں (۵) چونکہ متماثل ابدال  $\equiv$  اسے اسکی بجائے ایک رکھا جاسکتا ہے۔ اگرچہ وہ عنصر جو خود ایک دوریہ ہو اکائی سے بدلا جاسکتا ہے لیکن اسکا رکھنا اکثر ضروری ہوتا ہے تاکہ یہ بتایا جاسکے کہ یہ عنصر زیر عمل عنصر میں شامل تھا۔

دائری ابدال مس ایک ہی عنصر پر کئی مرتبہ دہرایا جاسکتا ہے اور متواتر اعمال 'مس'، 'مس' وغیرہ سے تعبیر کئے جاسکتے ہیں۔ مثلاً

مس  $\equiv (۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰)$

(247)

س<sup>۱</sup> = ( ا ب ج د ص ف )

س<sup>۲</sup> = ( ج د ص ف ا ب )

اس عمل کو جاری رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ س<sup>۱</sup> = ۱۔ بالعموم اگر غہ ۱۰ کم سے کم صحیح عدد ہو ایسا کہ س<sup>۱</sup> = ۱ تو ہم کہتے ہیں کہ ابدال میں کا ترتیب غہ ہے۔ پس یہ ظاہر ہے کہ ان کی ابدال کا ترتیب عناصر کی اس تعداد کے مساوی ہے جنکو وہ ہٹا آئے۔

دو عناصر غہ بہ کیلئے (عہ بہ) = (عہ) اور (عہ بہ) = ۱  
تین عناصر غہ بہ بہ کیلئے (عہ بہ ج) = (عہ بہ) (عہ بہ ج) = ۱

۲۲۲۔ ابدالوں کے حاصل ضرب پر پورا اور تو تیرا۔ اگر عناصر کے

دئے ہوئے جب پر عمل اتواتر دویا زیادہ، ان میں س<sup>۱</sup> س<sup>۲</sup> ... سے عمل کیا جائے تو نتیجہ ایک نئی ترتیب ہے جو ایک واحد ابدال میں سے حاصل ہو سکتی ہے۔ ابدال کو پہلے سے ابدالوں کا حاصل ضرب کہا جا سکتا ہے اور ہم کہہ سکتے ہیں س<sup>۱</sup> س<sup>۲</sup> ... میں س<sup>۱</sup> س<sup>۲</sup> ... کی ترکیب اجزاء کے ضربی اس ترتیب میں س<sup>۱</sup> س<sup>۲</sup> ... یعنی دائیں جانب سے بائیں جانب میں استعمال کئے جائیں۔ جب کسی ابدال کو اپنے ترکیبی

دور یوں میں دفعہ سابق کے مطابق تحلیل کیا جاتا ہے تو ہوتے دیکھتا ہے کہ اجزاء کے نمبر کی ترتیب کچھ بھی ہوتی ہے کیونکہ کسی دو دور یوں میں کوئی عنصر نہ یک نہیں ہوتا۔ لیکن بالعموم ابدالات کے حاصل ضرب میں جس میں دویا زیادہ اجزاء کے ضربی میں س<sup>۱</sup> س<sup>۲</sup> ... میں ایک ہی عنصر واقع ہو سکتا ہے یہ دیکھنا سب سے زیادہ ضروری ہے کہ جبری ضرب کے مبادیہ کا قانون صادق نہیں آتا اور اسلئے اجزاء کے نمبر کی ترتیب قائم رکھنی چاہیے۔



مثلاً تین عناصر کی صورت میں طالب علم اسکی آسانی سے تصدیق کر سکتا ہے کہ حاصل ضرب (۳۱) (۲۱) حاصل ضرب (۲۱) (۲۱) سے مختلف ابدال ہے۔ اس طرح قانون مبادلہ پورا نہیں ہوتا لیکن اٹلانی قانون صادق آتا ہے یعنی

$$س_۱ س_۲ س_۳ = س_۱ س_۲ س_۳$$

کیونکہ اگر  $س_۱$  کسی عنصر  $ا$  کو  $ب$  میں تبدیل کرتا ہے اور  $س_۲$   $ب$  کو  $ج$  میں اور پھر  $س_۳$   $ج$  کو  $د$  میں تو  $ا$  کی بجائے  $د$  کا ابدال بہر حال جاری حاصل ہے خواہ پہلے  $ا$  کو  $ج$  میں تبدیل کیا جائے (س\_۱ س\_۲ کے ذریعہ) اور پھر  $ج$  کو  $د$  میں یا پہلے  $ا$  کو  $ب$  میں تبدیل کیا جائے اور پھر  $ب$  کو  $د$  میں (س\_۲ س\_۱ کے ذریعہ)۔

ایک ہی ابدال  $س$  کو علی التواتر متعدد مرتبہ (فرض کروں مرتبہ) عمل میں لانے سے جو نتیجہ حاصل ہوا اسکو  $س^n$  سے تعبیر کیا جاسکتا ہے اور صریحاً ہمیں سادات حاصل ہوتی ہے

$$س^n س^n = س^{2n} = س^n س^n$$

(248) ایک دے ہوئے ابدال  $س$  کا مقلوب ابدال وہ ہے جو  $س$  کے ترتیب عمل کو الٹ دیتا ہے اور  $س^{-۱}$  سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ مثلاً اگر

$$س = (۱ ۲ ۳ \dots n) \text{ تو } س^{-۱} = (۱' ۲' ۳' \dots n')$$

$$س س^{-۱} = س^{-۱} س = ۱$$

چونکہ ممکن ابدالوں کی کل تعداد محدود ہے اسلئے  $س$  کی کسی نہ کسی سکرار سے عنصر  $س$  کی ابتدائی ترتیب پیدا ہونی چاہئے۔ چنانچہ اگر غے ایسا چھوٹے سے چھوٹا عدد ہو کہ  $س^n = ۱$  تو  $س$  کو رتبہ  $n$  کا کہا جاتا ہے





ج کا اثر یہ ہے کہ وہ ترتیب  $1, 2, 3, \dots, n$  کو ترتیب  $1, 2, 3, \dots, n$  میں بدل دیگا اور ت کا اثر یہ ہے کہ وہ اس آخری ترتیب میں  $1$  اور  $2$  کا باہمی تبادلہ کر دیگا۔ تب

$$ج ت \equiv (1, 2, 3, \dots, n-1, n) (1, 2, 3, \dots, n-1, n) = (1, 2, 3, \dots, n-1, n)$$

۴۔ اگر دائری ابدال ج کو انتقال ت سے ضرب دیا جائے

جبکہ انتقال کے دونوں عنصر ج میں شامل ہوں تو حاصل ابدال ج ت دو دوریوں کا حاصل ضرب ہوگا جنہیں کوئی عنصر مشترک نہ ہوگا۔  
ہم نے سیکھے ہیں

$$ج \equiv (1, 2, 3, \dots, n-1, n) (1, 2, 3, \dots, n-1, n) = (1, 2, 3, \dots, n-1, n)$$

پچھلی مثال کی طرح عمل کرنے سے فوراً حاصل ہوگا

$$ج ت \equiv (1, 2, 3, \dots, n-1, n) (1, 2, 3, \dots, n-1, n) = (1, 2, 3, \dots, n-1, n)$$

۵۔ اگر ابدال س کو انتقال ت سے ضرب دیا جائے جسکا

ایک ایک عنصر ابدال س کے دو مختلف دوریوں ج، ج میں شامل ہوتا ہے تو حاصل ضرب ج ج ت، ج اور ج کے سب عنصروں کا ایک غیر شکستہ دوریہ ہوگا۔

یہ فوراً حاصل ہوتا ہے اگر ہم پچھلی مثال میں حاصل کردہ مساوات کے طرفین کو ت سے ضرب دیں کیونکہ  $ت^2 = 1$ ۔

۶۔ اگر کوئی ابدال س، ر انتقالات کا حاصل ضرب ہے اور اگر اسکو انتقال ت سے ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب س ت میں یا تو ر، ر انتقالات شامل ہونگے یا ر۔ ر انتقالات۔

اگر س، ر عناصر پر موثر ہو تو جیسا کہ ہم نے اوپر بیان کیا ہے  
ر = ن - ک۔ اگر ت کی وجہ سے دو نئے عناصر داخل ہوں تو ایک

مزید انتقال حاصل ہوگا اور اسلئے کل رتبہ انتقال - حاصل ہو گئے۔ اس  
 نتیجہ صورت (باقی ہیں) ہو جب اس کے کہ (۱) دست کی وجہ سے صرف ایک نیا  
 عنصر داخل ہو یا (۲) دو عناصر میں سے ایک یا دو دور یہ ہیں پہلے سے  
 شامل ہیں یا (۳) دو عناصر جو اس کے مختلف دوریوں میں پہلے سے  
 شامل ہیں۔ یہ صورتیں کچھ آئین مثالوں میں زیر بحث آچکی ہیں اور یہ آئین  
 کے ساتھ حاصل ہوتا ہے کہ اس دست میں انتقال کی تعداد جیسے ۱ +  
 ہے سوائے اس صورت کے جبکہ دست کے دونوں عناصر اس کے  
 ایک ہی دور یہ میں واقع ہوں اور اس صورت میں ان نہیں بدلتا اور  
 ک بدل کر ک + ۱ ہو جاتا ہے اور اسلئے بدل کر  

$$n - (k + 1) = n - k - 1 = r - 1$$

ہو جاتا ہے۔  
 اس مثال سے یہ واضح ہے کہ اس کو انتقالات کے اصل ضرب کے  
 طور پر خواہ کسی طرح بیان کیا جائے ایک واحد مزید انتقال سے ضرب دینے کا  
 اثر یہ ہوتا ہے کہ اسکی یکسانیت (Parity) بدلتی ہے یعنی طاق  
 سے جفت یا جفت سے طاق ہو جاتا ہے۔  
 ابدال میں کا رتبہ اس کے دوریوں کے رتبوں کے ذواضعاً  
 اقل کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ  $s = j_1 j_2 j_3 \dots j_r$   
 اور فرض کرو کہ  $j_1 j_2 j_3 \dots j_r$  کے رتبوں کا کوئی مشترک نصف نہ ہو  
 چونکہ

$s = j_1 j_2 j_3 \dots j_r$   
 اور  $j_1 = j_2 = j_3 = \dots = j_r = 1$   
 اس لئے  $s = 1$  اور اگر  $s$  کی کم سے کم قیمت غہ ہو تو  $s = 1$



متواتر دوریوں ج، ج، ..... ج کے حامل ضرب میں رکھی جا سکتی ہے۔

س = ح ز

۱۱۔ منتظم ابدال

اسی  $\equiv (12 \ 5 \ 3 \ 1) (11 \ 4 \ 2) (9 \ 10 \ 8 \ 6)$   
کو ایک دائری ابدال کی قوت کے طور پر بیان کرو۔

جواب ۱۔ س ۳ (۱۲۲۳۴۵۸۹۱۰۱۱۲)

۱۲۔ عناصر لا، لاء، لام، ... لان کا ہر ایک انتقال اُن انتقالات (251) کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے جو - انتقالات کے حسب ذیل سلسلے میں شامل ہیں :-

$$(\omega^U, U) (\omega^U, U) \dots (\omega^U, U) (\omega^U, U) (\omega^U, U)$$

کیونکہ اس بات کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کہ اگر لایہ لایہ

کوئی دو عنصر ہوں تو

$$(u, u)(u, u)(u, u) = (u, u)$$

۱۳۔ ہر وہ ابدال جو انتقالات کی جفت تعداد میں تحلیل ہو سکتا ہو

قیسے رتبہ کے دائری ابدالات کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔

دیا ہوا ابدال نمونہ (عہ یہ) (عہ چہ) یا نمونہ (عہ بہ) (جہ ضہ)  
 کے حاصل ضربوں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔ اب (عہ بہ) (عہ چہ)

$= (عہ بہ جہ) اور (عہ بہ) = (جہ ضہ) = (عہ بہ جہ) (عہ ضہ جہ) کیونکہ$

(عہ پر جہ) (عہ ضد جہ) = (عہ پر جہ) (جہ عہ ضد)

= (عہ یہ) (عہ جب) (جب عہ) (جب عہ)

$$= (\text{عرب}) (\text{عجم})^2 (\text{جذہ})^2 \text{ اور } (\text{عجم})^2 = 1$$

۴۱۔ بتاؤ کہ عناصر لام، لام، لام، ... لان میں سے تین کا کوئی دائری ابدال 'ن' - ۲ دائری ابدالات

(لا لام لام) (لا لام لام) ... (لا لام لان) (لا لام لان)

کے ذریعہ بیان ہو سکتا ہے -  
اختصار کی خاطر صرف لائقوں کو رکھ کر ہم (عہ بہ جہ) کو (لہ مہ عہ)  
(لہ مہ بہ) (لہ مہ جہ) کی رقوم میں بیان کر چکے -

(عہ بہ جہ) = (عہ بہ) (عہ جہ)

= (عہ بہ) (عہ لہ) (عہ لہ) (عہ جہ) کیونکہ (عہ لہ) =

= (عہ بہ لہ) (عہ لہ جہ)

= (لہ عہ بہ) (لہ جہ عہ)

اب اسی طرح بائیں طرف کے ہر دو بیانیہ میں ایک نئے عنصر مہ کو داخل کر نیکے لئے اوپر کی مسادات سے استفادہ کر کے ہم حاصل کرتے ہیں

(عہ بہ جہ) = (مہ لہ عہ) (مہ بہ لہ) (مہ لہ جہ) (مہ عہ لہ)

= (لہ مہ عہ) (لہ مہ بہ) (لہ مہ جہ) (لہ مہ عہ) مطلوبہ جملہ -

(عہ بہ جہ) کو بیان کر نیکا حسب ذیل طریقہ بھی آسانی کے ساتھ ثابت کیا جاسکتا ہے

(عہ بہ جہ) = (لہ مہ عہ) (لہ مہ جہ) (لہ مہ بہ) (لہ مہ عہ) (لہ مہ جہ)

۲۲۳۔ متشابہ ابدالات - ہم دو ابدالات کو متشابہ اس وقت

کہیں گے جب انہیں دویوں کی ایک ہی تعداد شامل ہو اور متناظر دویوں میں حروف کی ایک ہی تعداد ہو -

دو ابدالات میں 'ت' متبادل پذیر کہلائینگے جبکہ س' ت

= ت میں -

ابدال 'ت' اس 'ت' سے تعبیر ہونیوالے عمل کو ہم 'ت' سے  
میں کا استحصال کہیں گے اور حاصل ہونیوالے ابدال کو 'ت' کے لحاظ



س کا مزدوج -

کوئی ابدال کسی دوسرے ابدال کے لحاظ سے اپنے مزدوج کے متشابہ ہوتا ہے۔ اسکو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ ابدال س کو ابدال

ت = (ا ب ج ... ل ... )

سے مستعمل کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ س کا ایک دوریہ (ا ب ج ... ل) ہے۔ عمل ت کا اثر ا کو ا سے بدلنا ہے جو س کے عمل سے ب سے تبدیل ہوتا ہے جو پھر ت کے عمل سے ب سے تبدیل ہوتا ہے۔ پس ابدال ت اس ت، ا کو ب سے، ب کو ج سے، ج کو ل سے تبدیل کرتا ہے اور میں کے دوریہ (ا ب ج ... ل) کے جواب میں اسکے مزدوج کا دوریہ (ا ب ج ... ل) ہے۔

نیز ت سے س کا استعمال اسوقت تکمیل پاتا ہے جبکہ س کے ہر دوریہ کے ہر حرف کو اس حرف سے تبدیل کیا جائے جو اس کے تحت ابدال ت میں واقع ہے۔ اس لئے حاصل ہوئی والا ابدال س کے متشابہ ہے۔ مکافیا یہ واضح ہے کہ اگر دو ابدالات س، س میں متشابہ ہیں تو ایک ابدال ت معلوم ہو سکتا ہے جو ایک کو دوسرے میں مستعمل کرے۔

حاصل ضرب س ت اور ت س جو بالعموم مختلف

ہوتے ہیں ہمیشہ متشابہ ہونگے کیونکہ

س ت = ت (ت س) ت -

حاصل ضرب س ت کا مزدوج ایک تیسرے ابدال ع کے لحاظ سے اپنے اجزائے ضربی کے مزدوجوں کے حاصل ضرب کے مساوی



اسی طرح  $\Delta$  بھی پہلے تین ابدالات سے نہیں بدلتا لیکن آخری تین ابدالات سے اپنی دوسری قیمت  $\Delta$  میں بدل جاتا ہے۔ چار عناصر کی صورت میں ذیل کے متعلق تفاعل پر غور کرو:-

فہ  $\equiv$  لا، لا، لا + لا، لا، لا  
 اس صورت میں فہ کے علاوہ دو اور قیمتیں ہیں یعنی  
 فہ  $\equiv$  لا، لا، لا + لا، لا، لا  
 اور فہ  $\equiv$  لا، لا، لا + لا، لا، لا  
 اسلئے یہ تفاعل تین قیمتیں ہے۔

اس امر کی بہ آسانی تصدیق ہو سکتی ہے کہ فہ حسب ذیل آٹھ ابدالات سے نہیں بدلتا:-

۱، (۲۱)، (۳۳)، (۲۱)، (۳۳)، (۳۱)، (۳۲)، (۳۱)، (۳۲)، (۳۱)، (۳۲)، (۳۱)، (۳۲)  
 اور باقی سولہ ابدالات میں سے ہر ابدال اسکو ایک یا دوسری قیمت میں بدل دیگا۔ وہ ابدالات جنکے عمل سے ایک تفاعل نہیں بدلتا ایک گروہ بناتے ہیں۔ یہ واضح ہے کہ گروہ کے دو یا زیادہ ارکان کے عمل ضرب سے جو اجتماع حاصل ہو وہ خود بھی گروہ سے متعلق ابدال ہو گا۔ پس ہم گروہ کی حسب ذیل باقاعدہ تعریف دے سکتے ہیں:-

مختلف ابدالات کے ایک نظام کو اس وقت گروہ کہا جاتا ہے جبکہ ان ابدالات کی تمام قوتیں اور ان کے تمام حاصل ضرب اسی نظام کا ایک حصہ ہوں۔

جتنے ابدالات گروہ میں شامل ہوتے ہیں انکی تعداد کو گروہ کا رتبہ کہا جائیگا۔



مربع مشہور متشکل تفاعل ہے یعنی مینر ۵۔ اس لیے ۳ کی قیمتیں ہیں جو عدد آ  
 مساوی ہیں مگر علامت میں مختلف یعنی ۱۵ اور ۱۵۔ ایسے دو قیمتی تفاعل  
 متبادلہ تفاعل کہلائینگے۔ یہ واضح ہے کہ کسی انتقال سے ۳ کی علامت بدل جاتی  
 ہے چنانچہ انتقال (۱۵) لایہ پر بخور کر اور ۳ کو اس کی علامت بدلے بغیر مگر اس طرح ترتیب  
 دو لایہ پر بھی عمل اختیار کریں جو لایہ کا ہے اس کے علامت کا مثبت ہو یا ضروری نہیں ہے۔ اس انتقال سے  
 اوپر کی صف میں پہلے بروز ضربی کی علامت بدل جاتی ہے اور اوپر کی صف کے  
 باقی دیگر اجزائے ضربی و دوسری صف کے اجزائے ضربی کے ساتھ باہم  
 بدل جاتے ہیں۔ باقی دیگر صفوں کے اجزائے ضربی پر کوئی اثر نہیں پڑتا  
 پس حاصل ضرب کی علامت بدل جاتی ہے۔ کسی اور انتقال سے یہ  
 حاصل ضرب پھر اپنی ابتدائی علامت کی طرف عود کرتا ہے۔ پس  
 دو انتقالات یا انتقالات کی جفت تعداد کے حاصل ضرب سے  
 ۱۵ نہیں بدلتا لیکن انتقالات کی طاق تعداد کے حاصل ضرب  
 اثر ۱۵ کو اس کی دوسری قیمت ۱۵ میں یا ۱۵ کو اس کی دوسری  
 قیمت ۱۵ میں بدلنے کا ہے۔  
 کسی ابدال کو انتقالات کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کرنے کے  
 متعدد طریقے ہیں لیکن اسکو خواہ کسی طرح بیان کیا جائے ایسے  
 اجزائے ضربی کی تعداد ہمیشہ جفت ہونی چاہئے یا ہمیشہ  
 طاق کیونکہ یہ ہونے لگتا کہ ایک ہی ابدال بوقت واحد ۱۵ کی علامت  
 کو بھی بدلے اور دوسری تبصر بھی رہے۔ اب چونکہ دو جفت ابدالات کا  
 حاصل ضرب خود ایک جفت ابدال ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اکائی  
 مع ان سب ابدالات کے جو انتقالات کی جفت تعداد سے بنے ہیں ایک  
 گروہ ہے اور یہ کہ ۱۵ اور ۱۵ دونوں تفاعل اس گروہ سے متعلق  
 ہیں۔ اسکو ہم متبادلہ گروہ کہینگے اور اب اسکا رتبہ دریافت کریں گے۔

فرض کرو کہ ن عناصر کا متبادل گروہ حسب ذیل ابدالات پر مشتمل ہے:-

(۱)  $س = ا، س، س، ...، س، ر$

اور فرض کرو کہ تشاکل گروہ کے باقی دوسرے ابدالات جو انتقالات کی طاق تعداد پر مشتمل اور اسلئے اوپر کے ابدالات سے مختلف ہیں حسب ذیل ہیں

(۲)  $س، س، س، س، ...، س، س$

اب ہم کسی انتقال  $ت$  کو پتے ہیں اور عمل ضرب سے حسب ذیل دو سلسلے بناتے ہیں:-

(۳)  $س، ت، س، ت، س، ت، ...، س، ت$

(۴)  $س، ت، س، ت، س، ت، ...، س، ت$

(۳) کا ہر ابدال انتقالات کی طاق تعداد سے ترکیب یافتہ ہے

اور اس لئے (۲) میں شامل ہے۔ نیز (۴) کا ہر ابدال انتقالات کی جفت تعداد سے بنا ہے اور اس لئے (۱) میں شامل ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  $ر \geq ت$  اور نیز  $ر \leq ت$  اس لئے  $ر = ت$  اور چونکہ  $ر + ت = ن$ ، متبادل گروہ کے رتبہ کے لئے آخر الامر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ر = \frac{۱}{۲} ن$$

۲۲۶- کثیر قیمتی تفاعلوں کی مزدوج قیمتیں اور مزدوج

گروہ۔ مسئلہ:- کسی گروہ کا رتبہ،  $ن$  کا ٹھیک مقسم ہوتا ہے اور خارج قسمت سے متناظر کثیر قیمتی تفاعل کی مختلف قیمتوں کی تعداد ظاہر ہوتی ہے۔

اس اہم مسئلہ کو ثابت کرنے میں سہولت پیدا ہو جاتی ہے اگر پہلے ایک تفاعل فہ ایسا معلوم کیا جائے جو ترتیب ر اور درجہ ن والے گروہ گ کے ابدالات میں  $\equiv$  ا، س، س، س، ... س سے نہیں بدلتا۔ ایسا تفاعل فہ معلوم کرنے کے لئے ہم ایک تفاعل مشہ = لا، لا، لا، لا، ... لا لیتے ہیں جہاں 'ا'، 'ب'، 'ج'، ... 'ل' تمام مختلف صحیح عدد ہیں اور اسلئے متشاکل گروہ کے تمام ابدالات کے لئے مشہ، ن مختلف قیمتیں اختیار کرتا ہے۔

مشہ = س، مشہ، مشہ = س، مشہ وغیرہ لینے سے ہم ثابت کرینگے کہ فہ = مشہ + مشہ + ... + مشہ، گروہ گ کے ابدالات سے نہیں بدلتا۔ ہم فہ کو مشہ، مشہ، ... مشہ کی کسی تو مجموعہ کے برابر بھی لے سکتے ہیں جو 'ا'، 'ب'، 'ج'، ... 'ل' کے لئے اعداد صحیح کے مختلف جٹ لینے کی ایک خاص صورت ہوگی پس اگر

$$\text{فہ} = \text{مشہ} + \text{مشہ} + \text{مشہ} + \dots + \text{مشہ} = (\text{س} + \text{س} + \dots + \text{س}) \text{ مشہ}$$

لیا جائے اور اسکو گروہ گ کے کسی ابدال س سے ضرب دیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

س، فہ = (س، س، س، ... + س، س، س، ... + س، س، س، ... + س، س، س، ...) مشہ۔  
اب اگر س، س، س، گروہ گ کے ابدال ہیں تو مفروض کے مطابق س، س، س، بھی گ، کا ابدال ہے اور فرید بریں س، س، س، مشہ  
 $\neq$  س، س، س، کیونکہ اگر س، س، س، مشہ = س، س، س، مشہ تو س، س، س،





بدلتا ہے۔ اور (۳) کوئی اور ابدالات متشاکل گروہ میں شامل نہیں ہیں جنہیں یہ خاصیت ہو کیونکہ اگر کوئی ابدال ت، فہ کو فہ میں بدلے تو حاصل ضرب ت ح سے فہ نہیں بدلیگا اور اس لئے یہ ابدال ت گروہ گ سے متعلق ہوگا۔ یعنی ت ح = س اور اس لئے ت پ س ہے۔ اب ہم ابدال ح سے جو گ یا سلسلہ س ح میں شامل نہیں ہے ایک اور صف بناتے ہیں۔ یہ ابدال فہ کو ایک نئی قیمت فہ میں بدلیگا کیونکہ اگر یہ فہ کو غیر تغیر رکھے تو یہ گ میں شامل ہوگا اور فہ کو فہ میں بدلے تو یہ دوسری صف میں شامل ہوگا۔ اسی طرح عمل کرنے سے اور ہر مندرجہ پر ح کی ایسی قیمت لینے سے جو سابقہ صفوں میں شامل نہ ہو ہم متشاکل گروہ کے ن ابدالات کو ختم کر سکتے ہیں اور ان کو غہ صفوں میں ترتیب دے سکتے ہیں جن کے ساتھ فہ کی قیمتیں فہ، فہ، ... فہ منسوب ہیں جو ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور جو فہ کی تمام قیمتوں پر مشتمل ہیں کیونکہ جدول سے ہمیں فہ پر کسی ابدال کا اثر معلوم ہو جائیگا۔ اس طرح ہرکو ذیل کی جدول ملتی ہے جس میں تشاکل کی خاطر ا کی بجائے ح لکھا گیا ہے۔

س، ح، س، ح، س، ح، ...، س، ح،

س، ح، س، ح، س، ح، ...، س، ح،

س، ح، س، ح، س، ح، ...، س، ح،

س، ح، س، ح، س، ح، ...، س، ح،



کی تشابہت کی وجہ سے یہ بالکل واضح ہے کہ انہیں سے ہر تفاعل کا ایک گروہ ہوگا جو قدر کے گروہ کے مشابہ ہوگا۔ یہ آسانی کے ساتھ ثابت ہو سکتا ہے کہ انہیں سے کسی تفاعل قدر کا گروہ گ کے تمام ابدالات کو ابدال حتی سے مستحیل کرنے سے جس سے قدر میں بدلتا ہے حاصل ہوتا ہے۔ واقعہ یہ ہے کہ کوئی ابدال حتی سے حتی، قدر کو نہیں بدلتا کیونکہ حتی سے وہ قدر میں تبدیل ہوتا ہے جو مس سے غیر متبدل رہتا ہے اور پھر حتی سے قدر میں تبدیل ہوتا ہے۔ پس قدر کا گروہ یہ ہے

جحر' اس جحر' جحر' اس جحر' جحر' اس جحر'... 'جحر' اس جحر'  
 جہاں گ کا ہر ابدال جحر سے مستعمل ہوتا ہے۔ اس نتیجہ کو اختصاراً  
 اس ترقیم

گیر = حَرگ، حَر

سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

گ، گ، گ... آگ کو مزدوج گروہ کہا جائیگا اور  
متناظر تقاعلوں فہ، فہ، فہ... فہ کو مزدوج تفاعل۔  
یہ واضح ہے (صفحہ ۲۳) کہ کوئی دو مزدوج گروہ متضابہ  
ابدالات پر مشتمل ہوتے ہیں۔

گ۔ اور متشاکل گروہ کے رُتَبوں کے درمیانی رشتہ سے متعلق جو کچھ اور پر ثابت ہوا وہ عام تر صورت یعنی گ، اور کسی وسیع تر گروہ گ کے رُتَبوں کے درمیانی رشتہ کے لئے بھی درست ہے جبکہ گ میں گ، تحت گروہ کے طور پر شامل ہو۔ اس کے یہ معنی ہیں کہ گ کا رتبہ کسی وسیع تر گروہ گ کے رتبہ کا ٹھیک تقسیم ہے اور خارج قسمت م ایک کثیر قیمتی تفاعل کی مختلف قیمتوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ یہ ایسا تفاعل ہے جو گ کے ابدال سے نہیں بہ لیا لیکن تفاعل کی مختلف قیمتیں گ کے ابدال سے حاصل ہوتی ہیں۔ اس کا ثبوت جو مندرجہ بالا ثبوت کے بالکل

تشابہ ہے اس طور پر دیا جاسکتا ہے کہ گ کے رابدالات کو صفوں کی ایک تعداد (فرض کروم) میں ترتیب دیا جائے جنہیں سے پہلی صف گ کے رابدالات سے بنی ہو دوسری صف ان رابدالات کو ح کے ضرب دینے کے بعد بنائی گئی ہو جہاں ح کا ایک ایسا ابدال ہے جو گ میں شامل نہیں ہے۔ تیسری صف گ کے رابدالات کو ح کے ضرب دینے کے بعد بنائی گئی ہو جہاں ح کا ایک ایسا ابدال ہے جو پہلی دو صفوں میں واقع نہیں ہوتا اور علیٰ ہذا یہاں تک کہ گ کے تمام رابدالات ختم ہو جائیں۔ جدول سے گ کے ہر ایک ابدال کا اثر رقم پر معلوم ہوتا ہے جو یا تو اس کو غیر متغیر رکھتا ہے یا فہ یا فہ یا فہ یا فہ میں بدل دیتا ہے۔ پس درحقیقت فہ + فہ + فہ + فہ + فہ = فہ

ایسا تفاعل ہے جو گتے کے ابدالات سے نہیں بدلتا۔  
اس طرح ہکو علاوہ ر غہ = ر غہ = ن کے حسب ذیل رشتے حاصل  
ہوتے ہیں:-  
ر = م ر اور اس لئے غہ = م غہ

## مثالیں

۱۔ پار عنصر کے لئے تفاعل فہ = لا، لاہ + لاہ، لاہ کی مختلف  
قیمتوں کے جواب میں، فرد و ج گردہ بناؤ۔  
یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ اس تفاعل کی صرف تین مختلف قیمتیں  
ہیں یعنی

فہ = لا، لاہ + لاہ، لاہ، فہ = لا، لاہ + لاہ، لاہ، فہ = لا، لاہ + لاہ، لاہ  
اور اس لئے ہر تفاعل کے لئے ایک ۸ ویرا نتیجہ کا گردہ ہے۔  
فہ کا گردہ حسب ذیل آٹھ ابدالات پر مشتمل ہے:-  
گ = [۱، (۲۱)، (۳۳)، (۴۱)، (۵۳)، (۶۱)، (۷۲)، (۸۴)]

[۱، (۲۱)، (۳۲)، (۴۱)، (۵۲)، (۶۱)، (۷۲)، (۸۴)]  
اگر ہم کوئی ابدال مثلاً (۳۲) لیں جو فہ کو فہ میں تبدیل کرتا ہے  
اور نیز کوئی دوسرا مثلاً (۴۲) لیں جو فہ کو فہ میں تبدیل کرتا ہے اور  
پھر پچھلی دفعہ کی جدول بنائیں تو ہمیں متشاکل گردہ کے تمام چوبیس ابدال  
حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں:-

۱ (۲۱) (۳۳) (۴۱) (۵۲) (۶۱) (۷۲) (۸۴)  
(۳۲) (۴۱) (۵۲) (۶۱) (۷۲) (۸۴) (۳۳) (۴۱)  
(۵۲) (۶۱) (۷۲) (۸۴) (۳۳) (۴۱) (۵۲) (۶۱)  
پہلی صف گردہ گ، ہے۔ دوسری صفیں گردہ نہیں ہیں لیکن  
اس طرح کی ہیں کہ دوسری صف کے ارکان سب کے سب فہ کو فہ میں

تبدیل کرتے ہیں اور ان کے علاوہ کوئی اور ارکان فہ کو فہ میں تبدیل نہیں کرتے۔ اس طرح تیسری صف کے ارکان سب کے سب فہ کو فہ میں تبدیل کرتے ہیں۔ اور ان کے علاوہ کوئی اور ارکان فہ کو فہ میں تبدیل نہیں کرتے۔ فہ کا متناظر گروہ گ، گ، گ کے ابدالات کو (۳۲) سے مستحیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور اس استحیل کے لئے گ، گ کے ابدالات میں صرف ۲ اور ۳ کا باہمی تبادلہ کرنا کافی ہے۔ چنانچہ اس طریقہ سے ہمیں فہ اور فہ کے گروہ آسانی کے ساتھ حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں :-

گ، گ = [۱' (۳۱) (۳۲) (۴۱) (۴۲) (۳۱) (۴۲) (۴۱) (۴۲) (۳۱) (۴۲) (۳۱) (۴۲)]

گ، گ = [۱' (۴۱) (۴۲) (۳۱) (۳۲) (۴۱) (۴۲) (۴۱) (۴۲) (۳۱) (۳۲) (۴۱) (۴۲)]

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ تیسرے رتبہ کے کوئی دائری ابدالات ان گروہوں

(260)

میں سے کسی گروہ میں موجود نہیں ہیں اور یہ تینوں گروہ بعض مشترک ابدالات رکھتے ہیں۔ کیونکہ اکائی ابدال تمام فرد و ج گروہوں میں مشترک ہونا چاہئے اور یہاں گ، گ، گ، گ میں اس اکائی ابدال کے علاوہ ابدالات (۳۱) (۴۲) (۳۱) (۴۲) (۴۱) (۴۲) (۴۱) (۴۲) مشترک ہیں۔ یہ چار ابدال تین فرد و ج گروہوں کا ایک مشترک تحت گروہ ہیں۔

۴۔ اس بات کی تصدیق کرو کہ پہلی مثال میں گ، گ کے ابدالات ایک بند گروہ بناتے ہیں یعنی اس کے ارکان میں سے کسی دو کو ضرب دینے سے ہمیشہ اسی گروہ کا کوئی نہ کوئی رکن پیدا ہوتا ہے۔

گ، گ کے ابدالات کو پہلی مثال کی ترتیب میں ہی رکھ کر انکو علی الترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ سے تعبیر کرو تو حسب ذیل غریبی جدول ملے گی جس کی تصدیق آسانی کے ساتھ ہو سکتی ہے :-

	ا	ب	ج	د	ع	ف	گ
ا = ا	ا	ب	ج	د	ع	ف	گ
(۲۱) ا = ا	ا	ج	ب	گ	ف	ع	د
(۲۳) ب = ب	ب	ج	ا	ا	ف	گ	د
(۲۳)(۲۱) ج = ج	ج	ب	ا	ا	ع	د	گ
(۳۱)(۲۲) د = د	د	ف	گ	ع	ا	ج	ب
(۳۱)(۳۲) ع = ع	ع	گ	ف	د	ج	ا	ب
(۳۲)(۳۱) ف = ف	ف	د	ع	گ	ب	ا	ج
(۳۲)(۳۱) گ = گ	گ	ع	د	ف	ا	ب	ج

عمل ضرب میں پہلے ستون سے جزو ضربی لیکر اسکو باری باری سے  
ادپر کی صف کے سر حرف کی داہنی جانب رکھتا ہوگا۔  
یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ گ میں تخت گروہ

[ا، ب، ج] [ا، ج، د، ع] [ا، ج، ف، گ]

شامل ہوتے ہیں جو سب کے سب چوتھے رتبہ کے ہیں نیز دوسرے رتبہ  
کے متعدد تخت گروہ بھی شامل ہیں مثلاً

[ا، ب] [ا، ج] وغیرہ۔

۳۔ چار عناصر کے لئے متبادل گروہ گ بناؤ۔ ایسے ابدالات

جو انتقالات کی جفت تعداد پر مشتمل ہیں مثال (۱) میں دئے ہوئے چوبیس

ابدالات میں سے آسانی کے ساتھ چن لئے جاسکتے ہیں۔ چنانچہ ایسے چار ابدالات ۱، (۲۱) (۲۳) (۳۱) (۴۲) (۴۱) (۳۲) ہیں اور پھر تیسرے رتبہ کے آٹھ دائری ابدالات ہیں۔ ان کو ہم تین صفوں میں حسب ذیل وضع پر ترتیب دیتے ہیں:-

$$\left. \begin{array}{cccc} (۲۱) & (۲۳) & (۳۱) & (۴۲) \\ (۲۳۱) & (۲۳۲) & (۴۲۱) & (۴۲۲) \\ (۲۴۱) & (۲۴۲) & (۳۴۱) & (۳۴۲) \end{array} \right\} = \text{گ}$$

اس گروہ سے متعلق تفاعل ہا ہے۔ اگر اوپر کے ہر ابدال کو کسی انتقال مثلاً (۳۲) سے ضرب دیا جائے جو ہا ہے تو۔ ہا میں تبدیل کر آئے تو متشکل گروہ کے باقی بارہ ابدالات حاصل ہوتے ہیں۔ اگر تک کے ہر رکن کو (۳۲) سے مستحیل کیا جائے تو۔ ہا کا گروہ حاصل ہوگا اور اسکی آسانی کے ساتھ تصدیق ہوگی کہ یہ گروہ ایک پربلیق ہوتا ہے جو ہا کا گروہ ہے۔ مثلاً (۲۱) (۲۳) (۳۱) (۴۲) (۴۱) (۳۲) ہیں ہے (۳۱) (۳۲) (۴۱) (۴۲) (۲۱) (۲۳) آپس میں بدل رہے ہیں اور علیٰ بذالقیاس۔ پس یہ وہ توں خود گروہ اس صورت میں منطبق ہوتے ہیں کیونکہ ہا اور۔ ہا (دونوں) ایک ہی گروہ سے متعلق ہیں یہی نتیجہ خاصہ کی کسی تعداد کے لئے بھی درست ہے (۲۰ فو ۲۱۵)۔

ابدالات کو متذکرہ عدد میں منسوب نہیں ترتیب دینے سے اس امر کی توضیح ہوتی ہے جو پچھلا دفعہ کے ختم پر بتایا تھا۔ پہلی صف کے چار ابدال گ کا ایک تحت گروہ ہیں ان سے دوسری صف کے چار ابدال (۲۳۱) سے ضرب (اسکو بائیں جانب رکھ کر) دینے سے حاصل ہوتے ہیں اور آخری چار ابدالات (۲۴۱) سے ضرب دینے سے تحت گروہ کا رتبہ ۴ گ کے رتبہ کا ایک قسم ہے۔ اس گروہ کو ہم ہا سے تعبیر کرینگے چنانچہ

$$\text{ھ} = ۱، (۲۱) (۲۳) (۳۱) (۴۲) (۴۱) (۳۲) (۲۲)$$





(262)

اسکو اول دائیں جانب اور پھر بائیں جانب، متشاکل گروہ کے کسی ایدال سے جو اس میں پہلے سے شامل نہ ہو ضرب دینے سے ہمیں یہ دو سلسلے ملتے ہیں :-

(۲) ت'ت س'س، ت'س س'... ت'س س'ن

ت'س'ت'س'ت'...س'ت' (۳)

ان میں سے ہر ایک میں وہ  $\frac{1}{n}$  نابدالات ہونے چاہئیں جو (۱) میں شامل نہیں ہیں۔ پس یہ دونوں سلسلے مماثل ہیں اور خ خواہ کچھ ہی ہو جے کی کسی خاص قیمت کے لئے بھی یہ رشتہ

ت س خ = س سے ت یا س خ = ت اس سے ت

مقاسے جس سے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ گروہ (۱) میں وہ سب ابدالات شامل ہیں جو اس میں شریک ہوئیوں نے کسی ابدال کے متنازعہ ہیں۔ پس (۱) کسی واحد انتقال پر مشتمل نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر ایسا ہو تو اس میں سب ابدالات ویسے ہی ہونگے اور اس لئے وہ متنازعہ گروہ کے مماثل ہو گا (مثال ۴)۔

اب بتایا جاسکتا ہے کہ (۱) میں کسی دو انتقال کا حاصل ضرب بطور ابدال کے شامل ہے۔ اس مقصد کے لئے فرض کرو کہ سلسلہ (۲) میں ت کوئی انتقال ہے۔ (۱) اور (۲) دونوں کو ایک دوسرے سے انتقال سے ضرب دینے کا اثر یہ ہوگا کہ دونوں سلسلے (۱) اور (۲) ایک دوسرے کی جگہ بدل جائیں گے۔ اس لئے یہ ثابت ہو گیا کہ (۱) کے ابدال میں سے ایک ابدال ہونا چاہئے کیونکہ (۱) = (۱) نہیں ایک ہے۔

اس سے یہ واضح ہے کہ ہر دو قسمی تفاعل متبادلہ گروہ سے متعلق ہو گا۔

کیونکہ صرف ہی گروہ ہے جس کا رتبہ مسادات ۲ =  $n$  کو پورا کرتا ہے۔  
 ۶۔ متبادل گروہ میں طاق رتبہ کے تمام دائری ابدالات شامل ہوتے ہیں اور جفت رتبہ کا کوئی ابدال شامل نہیں ہوتا۔  
 ۷۔ ثابت کرو کہ وہ گروہ جس میں تیسرے رتبہ کے تمام دائری ابدال شامل ہوتے ہیں متبادل گروہ ہے یا متشکل گروہ۔  
 مثال ۱۳ دفعہ ۲۲۲ استعمال کرو۔  
 ۸۔ ثابت کرو کہ جس گروہ میں پانچویں رتبہ کے تمام دائری ابدالات شامل ہوتے ہیں اس میں تیسرے رتبہ کے تمام دائری ابدالات بھی شامل ہوں گے۔

(۱ ج د ع ب) (۱ ج ب ع د) = (۱ ب ج)  
 ۹۔ گروہ کا رتبہ اس کے ابدالات میں سے کسی ایک کے رتبہ کا نصف ہوتا ہے۔  
 ۱۰۔ اگر  $n$  ایک مفرد عدد ہو تو رتبہ  $n$  کا ہر گروہ رتبہ  $n$  کے ایک دائری ابدال کی  $n$  قوتوں سے ترکیب پاتا ہے۔  
 ۱۱۔ اگر دو گروہوں میں مشترک ابدالات ہوں تو یہ خود ایک گروہ بناتے ہیں اور انکی تعداد دونوں گروہوں کے رتبوں کا مشترک قسم ہے۔  
 ۱۲۔ اگر ایک گروہ کے ارکان ایک ہی ابدال سے مستعمل کئے جائیں تو اس طور پر اخذ کردہ فرد ج خود ایک گروہ بناتے ہیں۔  
 دفعہ ۲۲۳ کے ختم پر دئے ہوئے رشتوں کو استعمال کرو۔

۲۲۷۔ دئے ہوئے گروہ کے تفاعلوں کا بنانا۔ گیا تو تفاعل (263)

اب ہم پھر اس مسئلہ پر بحث کریں گے جو ن متغیروں  $لا، لام، ... لان$  کے ایسے تفاعلوں کے بنانے سے متعلق ہے جو ایک دئے ہوئے گروہ کے تمام ابدالات کے لئے نہیں بدلتے۔

اس مسئلہ پر ہم نے دفعہ ۲۲۶ کی ابتدا میں بحث کی تھی۔ ہم سا کیلئے ذیل کے مختلف نمونہ کا تفاعل انتخاب کرتے ہیں جو متشکل گروہ کے تمام ابدالات کے لئے ن مختلف قیمتیں رکھتا ہے:-

$$سا = عم، لا + عم، لا + عم، لا + ... + عم، لا$$

جہاں عم، عم، ...، عم ن مختلف مستقل ہیں۔ اس تفاعل سا کو گیارہ افعال "کہتے ہیں دفعہ ۲۲۶ کی طرح سا، سا، ...، سا کو گ کے ابدالات سے حاصل کیا جاتا ہے تو ہم دیکھتے ہیں سا، سا، ...، سا گروہ گ کے ابدالات سے نہیں بدلتے۔ بالخصوص تفاعل

$$نم = (سا + ما) \times (سا + ما) \dots (سا + ما)$$

گروہ گ کے ابدالات سے نہیں بدلیگا اور ان ابدالات سے جو گ میں شامل نہیں ہیں ایک مختلف قیمت میں بدل جائیگا۔ اس لئے کسی وسیع تر گروہ کے ابدالات سے جس میں گ بحیثیت تحت گروہ شامل ہو تفاعل نم غیر متغیر نہیں رہتا۔ نم کو ما کی قوتوں میں پھیلایا جائے تو اگرچہ ما کی قوتوں کے بعض سر ایک وسیع تر گروہ کے ابدالات سے نہ بدلیں سب کے سب سر غیر متغیر نہیں رہتے اور اس لئے ان میں سے ایک ابدال سے ہمیں ایک ایسا تفاعل ملیگا جو ابدالات گ سے غیر متغیر رہتا ہے اور ایک وسیع تر گروہ کے ابدالات سے بدل جاتا ہے۔ ایک مسادات کی اصولوں کی قوتوں کے مجموعوں کے لئے ان جملوں کا لحاظ رکھتے ہوئے جو سروں کی رقوم میں بیان کئے گئے ہیں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ نم میں ما کی قوتوں کے سروں کی بجائے ہم سا، سا، ...، سا لے سکتے ہیں اور اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ قوتوں کے ان مجموعوں میں سے کم از کم ایک ایسا ہے جو گ کے ابدالات سے نہیں بدلتا

اور متشاکل گروہ سے کسی ایک ابدال سے بدل جاتا ہے۔  
ذیل میں ہم دئے ہوئے گروہ سے متعلق تفاعلوں کو معلوم کرنے کے  
اس طریقہ کی توضیح میں چند مثالیں دیتے ہیں۔

### امثلہ

۱۔ تین متغیروں کا ایک تفاعل بناؤ جو متبادل گروہ

[ (۱۳۱) ' (۳۲۱) ' (۱۲۳) ]

کے تمام ابدالات سے غیر متغیر رہے۔

(264)

کیا لوا کے تفاعل پر ان ابدالات سے عمل کرنے سے

سا = عم لا + عم لا + عم لا

سا = عم لا + عم لا + عم لا

سا = عم لا + عم لا + عم لا

سا اور سا دونوں لا لا میں متشاکل ہیں۔ لیکن سا سا

سا کے ذریعہ ہم غیر متشاکل تفاعل

لا لا + لا لا + لا لا اور لا لا + لا لا + لا لا

میں کر سکتے ہیں جن میں سے دونوں دئے ہوئے گروہ سے متعلق

ہونے چاہئیں۔ اگر ان تفاعلوں کو قارا اور قارا کہا جائے تو اس امر کی

آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کہ

سا = عم لا + عم لا + عم لا + (قارا قارا + قارا قارا)

جہاں قارا = عم لا + عم لا + عم لا + عم لا = قارا

گروہ ۲۳۰ کا طریقہ استعمال کیا جائے اور سا = لا لا لیا جائے

تو اہر کا نتیجہ زیادہ آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔  
۲۔ چار تغیروں کے وہ تفاعل دریافت کرو جو گروہ

۵۵ ≡ [ (۲۱) (۳۳) (۳۱) (۳۲) (۴۱) (۴۲) ]

سے متعلق ہیں۔

گیالوا کے تفاعل پر ان ابدالات کا عمل کرنے سے حسیل  
چار تفاعل حاصل ہونگے:-

سا۳ ≡ عم لا + عم لا + عم لا + عم لا

سا۴ ≡ عم لا + عم لا + عم لا + عم لا

سا۵ ≡ عم لا + عم لا + عم لا + عم لا

سا۶ ≡ عم لا + عم لا + عم لا + عم لا

یہ معلوم ہوگا کہ ح سا، لا، لا، لا، لا میں متشاکل ہے۔

ح سا متشاکل نہیں ہے۔ موزانہ کو تفاعل سے مثال ۳ و ۴  
تفاعل (ع + ب + ق + ج) قدم فوراً حاصل ہو جائے گا جس پر  
قدم، قدم سے لا، لا، لا، لا کے درجہ تفاعل قیہ سوتے ہیں۔  
مثال ۱۰۔ قدم ۲۲۷ میں لگے ہیں۔ فی الحقیقت

ح سا۳ ≡ عم لا + عم لا + عم لا + عم لا (عم عم - عم عم -  
۴ + ۴ + ۴ + ۴)

غیر متشاکل تفاعل عم، عم، عم، عم علی الترتیب درجہ گروہوں  
لگ، لگ، لگ سے متعلق ہیں جنکا تہ آٹھ ہے۔ اختیار ہی مستقلوں  
ساتھ لینا مجموعہ کے ہوتے گروہ سے متعلق ہے اور وہ یہ ہے  
تفاعل ہے۔



مختلف قیمتوں کا ہر صحیح متشاکل تفاعل خود عناصر کا متشاکل تفاعل ہوتا ہے۔

اگرچہ یہ مسئلہ ایک غہ قیمتی تفاعل (دفعہ ۲۱۶) کی فردوج قیمتوں فہ، فہ، فہ، فہ، فہ کی ساخت کی مشابہت سے کافی طور پر واضح ہے لیکن ہم ایک باقاعدہ ثبوت بھی حسب ذیل طریق پر دینگے۔ فرض کرو کہ غہ قیمتی کوئی صحیح مطلق متشاکل تفاعل فا (فہ، فہ، فہ) ہے۔ ان غہ قیمتوں پر خواہ کوئی ابدال نہ ہو (جو عناصر پر موثر ہو) استعمال کیا جائے اس سے کوئی تفاعل یا تو غیر متبدل رہتا ہے یا اسکی جگہ دوسرے تفاعلوں میں سے کوئی ایک تفاعل لے لیا ہے نیز حاصل ہونیوالی قیمتوں میں سے کوئی دو مساوی نہیں ہو سکتیں کیونکہ اگر ہوں، فہ، فہ، فہ کے مساوی ہو تو ابدال میں کوئی عمل میں نہ آئے۔ یہ نتیجہ نکلیں گے کہ فہ، فہ، فہ، فہ کے مغروض کے خلاف ہے۔ پس فہ کی وہی غہ قیمتیں ابدال میں کے عمل سے کسی نہ کسی ترتیب میں پھر رونا ہوتی ہیں۔ اس لئے متشاکل تفاعل فا، فہ، فہ، فہ، فہ سے غیر متبدل رہتا ہے۔ اور اس لئے وہ خود عناصر کا ایک متشاکل ہے۔

اس سے فوراً حسب ذیل نتیجہ صریح اخذ کیا جاسکتا ہے:-

نتیجہ صریح:- کسی صحیح کثیر قیمتی تفاعل کی غہ مختلف قیمتیں ایک مساوات کی اسیلیں ہیں جسکے سر خود عناصر کے صحیح متشاکل تفاعل ہیں۔



اسکی تمثیل کے لئے دیکھو جلد اول دفعہ ۳۹ مثال ۴۔ منطق صحیح تفاعلوں کے لحاظ سے اوپر جو کچھ ثابت کیا گیا اسکی توسیع تمام منطق تفاعلوں کے لئے ہو سکتی ہے خواہ وہ صحیح ہوں یا نہ ہوں۔ کیونکہ کوئی کسر دفعہ ۱۹ کے طریقہ سے ایک متماثل شکل میں تبدیل ہو سکتی ہے جسکا نسب غا غا صر کی رقوم میں متماثل ہو۔

۲۲۹۔ مسئلہ۔ ایک ہی گروہ سے متعلق دو تفاعلوں میں سے ہر ایک کو دوسرے کی رقوم میں ناطق طور پر بیان کیا جاسکتا ہے

(268) یہ اہم مسئلہ جس پر اب ہم ابدال کے طریقہ کے اصول جاری

کرینگے اس سے پہلے (دفعہ ۱۹) ذرا مختلف نقطہ نگاہ سے زیر بحث اچکا ہے۔ فرض کرو کہ  $\text{فم}$  اور  $\text{پم}$  دو تفاعل ہیں جو ایک ہی گروہ

گ، = [ ا، س، س، س، ...، س، ر ]

سے متعلق ہیں جسکا درجہ ن اور رتبہ ر ہے۔ نیز ان میں سے ہر تفاعل کی غہ مختلف قیمتیں ہیں جہاں  $\text{رغہ} = \text{ن}$ ۔ کوئی ابدال جو گ میں شامل نہیں ہے نہ کو اسکی قیمتوں میں سے کسی ایک میں (فرض کرو

فیس میں) بدل دیگا اور ساتھ ہی  $\text{پم}$ ،  $\text{پس}$  میں بدل جائیگا۔

تمام ممکن ابدالات سے عمل کرنے سے قیمتوں کے غہ زوج  $\text{فم}$ ،  $\text{پم}$ ،  $\text{فم}$ ،  $\text{پم}$ ، ...،  $\text{فم}$ ،  $\text{پم}$  حاصل ہونگے۔ اب اولاً منطق تفاعل

$\text{ح} \text{فم} \text{پم} \equiv \text{فم} \text{پم} + \text{فم} \text{پم} + \dots + \text{فم} \text{پم} + \dots + \text{فم} \text{پم}$  (۱)

صریحاً غا صر کا ایک متماثل تفاعل ہے کیونکہ اسی استدلال سے جو دفعہ سابق میں استعمال ہوا یہ معلوم ہوتا ہے کہ غا صر پر موثر خواہ کوئی ابدال ہو



غیر متبدل رہتا ہے جو دوسرے تفاعل کا گردہ بناتے ہیں اور اس لئے یہ دو گروہ ایک دوسرے پر منطبق ہونے چاہئیں۔

۲۳۔ مسئلہ کی توسیع اور نتائج صیح - فم اور پم کے گردہ

ماثل نہ بھی ہوں لیکن اگر انہیں سے ایک دوسرے میں تحت گردہ کے طور پر شامل ہو تو بھی یہ درست ہے کہ وہ تفاعل جو وسیع تر گردہ سے متعلق ہے (اور اس لئے جو مختلف قیمتوں کی کثیر تعداد پر مشتمل ہوتا ہے) تنگ تر گردہ کے تفاعل کی رقوم میں ناطق طور پر بیان ہو سکتا ہے۔  
فرض کرو کہ پچھلی دفعہ کے گردہ گ سے متعلق تفاعل فم ہے اور پم وسیع تر گردہ

گ = [ 'س' ... 'س' 'س' ... 'س' ]

سے تعلق رکھتا ہے۔ تب ہمیں ذیل کے رشتے ملتے ہیں (دفعہ ۲۲)

رغہ = ر غہ = ن 'ر' = ک 'ر' غہ = ک غہ  
حسب سابقہ کی غہ مختلف قیمتیں ہیں لیکن پم کی قیمتیں (یعنی پم، پم، ...، پم) ک کے جڑوں میں مساوی ہو جاتی ہیں اور

اس طرح صرف غہ مختلف قیمتیں باقی رہتی ہیں۔ تاہم یہ درست ہے کہ دفعہ سابق کا جملہ (۱) 'لا'، 'لام' ... 'لا' کا ایک متماثل تفاعل ہے کیونکہ اس پر استعمال کر رہ کسی یہ اس سلسلہ کی نہیں کسی نہ کسی ترتیب میں

روٹا ہوتی ہیں۔ پس مساواتیں (۲) حسب سابق حل کیا سکتی ہیں اور پم کے لئے فم کی رقوم میں ایک جملہ مائل ہو سکتا ہے۔ لیکن اگر فم کیلئے پم کی رقوم میں ویسا ہی جملہ مائل کرنے کی کوشش کی جائے تو محسوس ناکام رہتا ہے۔ اسکی وجہ یہ ہے کہ فیمنوں میں سے دو یا زیادہ قیمتوں کا

مساوی ہونا ہے اور ان مساواتوں کے حل میں یہ بات مضمر ہے کہ ذکی کوئی دو قیمتیں مساوی نہیں ہیں (دیکھو مثال ۱ صفحہ ۱۰۰)۔ ایسے توسیع شدہ مسئلے کو لگرائنج نے دریافت کیا تھا چنانچہ اسکو حسب ذیل شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے :-

لگرائنج کا مسئلہ :- اگر متغیروں کے کسی جٹ کے دو منطق تفاعل ایسے ہوں کہ ایک تفاعل اس گردہ کے تمام ابدالات سے غیر متبدل رہتا ہے جس سے دوسرا تفاعل متعلق ہے تو پہلا تفاعل دوسرے کے ذریعہ ایک صحیح کثیرالارقام کی شکل میں بیان ہو سکتا ہے جسکے سرمتغیروں کے منطق متشکل تفاعل ہیں۔

اس مسئلے سے اہم نتائج اخذ کئے جاسکتے ہیں اور یہ ذیل کے نتائج صریح میں شامل ہیں :-

نتیجہ صریح ۱۔ ایک ایسا تفاعل ہمیشہ معلوم ہو سکتا ہے جسکی رقوم میں دئے ہوئے تفاعلوں کی کوئی تعداد ناطق طور پر بیان ہو سکتی ہے۔

دئے ہوئے تفاعلوں کے گرد ہوں میں ہمیشہ ایک تحت گردہ موجود ہوتا ہے جو تمام گرد ہوں میں مشترک ہے کیونکہ کم از کم متماثل ابدال میں = تمام گرد ہوں میں مشترک ہے۔ اس لئے تمام تفاعل مشترک تحت گردہ سے متعلق تفاعلوں میں سے کسی ایک کی رقوم میں بیان کئے جاسکتے ہیں۔

(۷۶۸)

فرض کر دو کہ 'ے' ہوئے تفاعل 'فہ' 'پہ' 'چہ' ... ہیں تو

سہ = عہ + فہ + پہ + چہ + ... (جہاں 'سہ' 'پہ' 'چہ' ... اختیار کی مشق ہیں) مشترک تحت گردہ کے لئے منطوق یہ قسم کا ایک تفاعل ہے۔ کیونکہ کوئی ابدال جو سہ کو تبدیل نہیں کرتا 'فہ' 'پہ' 'چہ' وغیرہ کو بھی تبدیل نہیں کریگا اور اس لئے 'فہ' 'پہ' 'چہ' ... کے گردہوں میں مشترک ہو گا۔

نتیجہ صریح ۲۔ خواہ کوئی منطق تفاعل ہو وہ ایک تفاعل کی رقوم میں جسکی ن مختلف قیمتیں ہیں ناطق طور پر بیان ہو سکتا ہے، بالخصوص وہ گیا لوا کے تفاعل کی رقوم میں ناطق طور پر بیان ہو سکتا ہے۔

کیونکہ ن قیمتیں تفاعل کا گردہ، تداخل ابدال میں تبدیل ہونے پر ہر دو سرے تفاعل میں بطور تحت گردہ کے شامل ہے۔

نتیجہ صریح ۳۔ خواہ متغیر دل کو گیا لوا کے تفاعل کی رقوم میں ناطق طور پر بیان لیا جا سکتا ہے۔

مثلاً وہ گردہ جس سے لا متعلق ہے ابدالات کی زد ... (ن-۱) تعداد پر مشتمل ہے جس میں تحت گردہ کا کوئی شامل ہے۔ اس تفاعل کی ن قیمتیں ...

ہیں اور انہیں سے ہر ایک ... گیا لوا کے تفاعل کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے اس نتیجہ صریح میں جو مسئلہ بیان ہوا ہے اسکو بغیر ثبوت کے ایبل (A. Abel) نے بیان کیا تھا۔ گیا لوا (Galo's) نے اس مسئلہ کا ایک ثبوت دیا ہے جس کی بناء ابتدائی اصولوں پر ہے۔

(259)

اسکو ہم بیان کر دینا مناسب سمجھتے ہیں کیونکہ اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ عمل حساب کو کس طرح جاری رکھا جاسکتا ہے اور کسی ایک متغیر کے لئے مطلوبہ منطق تفاعل کس طرح حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ  $f(لا) = ۰$  مساوات ہے جسکی اصلیں  $لا، لا، لا، لا$  ہیں اور یہ سب کی سب غیر مساوی ہیں اور فرض کرو کہ اصلوں کے ایک منطق تفاعل پہ کی ایک معلوم قیمت پہ ہے اور یہ تفاعل مختلف قیمتیں رکھتا ہے۔

اگر  $لا$  کے سوائے تمام اصلوں کو ہر ممکن طریقہ سے ترتیب دیا جائے تو یہ کی  $۱ \times ۲ \times ۳ \dots (ن-۱) = ۰$  مختلف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جو اس مساوات

ن  $(پہ - پہ) (پہ - پہ) \dots (پہ - پہ) = ۰$  سے ملتی ہیں۔

جب اس مساوات کو پھیلا یا جائے تو اس کے سر  $لا، لا، لا، لا$  کے متشاکل تفاعل ہیں اور اس لئے مساوات

$$f(لا) = ۰$$

کے سروں کی رقوم میں بیان کئے جاسکتے ہیں اور انہیں  $f(لا)$  کے سروں کے ساتھ ساتھ  $لا$  منطق شکل میں شامل ہوگا۔ اگر پھیلائی ہوئی مساوات کو  $f(پہ، لا) = ۰$  سے تعبیر کریں تو  $f(پہ، لا) = ۰$  کیونکہ وہ  $پہ$  سے پوری ہوتی ہے نیز  $f(لا) = ۰$  جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مساواتیں  $f(لا) = ۰$ ،  $f(پہ، لا) = ۰$  ایک مشترک اصل رکھتی ہیں۔ یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے کہ صرف ہی ایک اصل مشترک ہے۔ پس اگر ہم  $f(لا)$  اور  $f(پہ، لا)$  کے مشترک مقسوم علیہ اعظم کی جستجو کریں اور عمل کو جاری رکھیں حتیٰ کہ  $لا$  میں پہلے



سویہ اور میں منطق متشاکل تفاعل میں اور  $\Delta$  نمیز ہے۔

کسی دو قیمتی تفاعل کو رتبہ پانچ کے ایک گروہ سے متعلق ہوتا چاہے۔ اس رتبہ کا گروہ صرف تبدل گروہ (مثال ۵ دفعہ ۲۷۲) ہے جس سے تفاعل متعلق ہے۔ پس مسئلہ بالا دفعہ ۲۷۹ کے اساسی مسئلہ سے بطور ایک نتیجہ صریح کے اخذ ہوتا ہے۔ تاہم اس کی اہمیت کے مد نظر ذیل میں ایک بالکل جداگانہ آزمائشوں دیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ تفاعل کی دو قیمتیں ۱۰ اور ۲۰ سے تعبیر ہوتی ہیں اور

فرض کرو کہ ان کے جواب میں گروہ گ اور گ ہیں ضمیر سے ہر ایک کا

رتبہ ۱/۲ ہے۔ سب سے اول یہ دو گروہ محاشل ہونے چاہئیں، کیونکہ اگر گنگا کا کوئی ابدال اس 'فہم' کو اسکی دوسری قیمت نہ ہیں تبدیل کر دے تو اس 'فہم' کو فہم میں بدل دیگا، لیکن یہ ناممکن ہے کیونکہ اس 'اور' میں دونوں 'گروہ' گنگا سے متعلق ہیں۔ پس گنگا کا ہر ابدال 'گ' سے متعلق ہونا چاہئے اور بالعکس۔

اب یہ ثابت کر نیکی ہے کہ یہ گروہ متبادل گروہ کے ساتھ  
منطبق ہوتے ہیں اس افعال فعل - ضم = یہ یہ خود کرد۔ جرد بدل  
جو مشترک گروہ۔ سے متعلق ہے اس افعال کو نہیں بدلتا، کوئی دوسرا  
بدال، فعل کو فعل میں اور فعل کو فعل میں نہیں کر دیگا اور اس لئے یہ  
کی علامت بددیگہ مثلاً انھیں رلے لایا یہ اثر رکھتا کیونکہ کسی تبادل

تفاعل کی دو قیمتوں میں جو گروہ مشترک ہے وہ امتزاج کا گروہ کے لئے  
منطبق ہوئے بغیر تمام انتقادات پر مشتمل نہیں ہو سکتا۔ پھر یہ بات بھی  
یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قدم اولیہ - ثانیہ سے تقسیم پذیر ہے اور اس لئے  
تمام فرقوں کے مابین عرب سے تقسیم پذیر ہے۔



۱۷ سے پہ کا خارج قسمت ایک متشاکل تفاعل ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ ۱۷ کی اعلیٰ ترین قوت جو پہ میں واقع ہوتی ہے (۱۷) ہے۔ تب (۱۷) سے پہ کا خارج قسمت ایک متشاکل تفاعل ہے، کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو وہ متبادل تفاعل ہو گا اور اس میں ۱۷ ایک جزو ضربی کے طور پر مکرر شریک ہو گا جو مفروض کے خلاف ہے۔ پس فوراً یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ م ایک طاق عدد ہے اور یہ کہ ۱۷ سے پہ کا خارج قسمت ایک متشاکل تفاعل ہے اسلئے

ق<sub>۱</sub> - ق<sub>۲</sub> = (۱۷) اور ق<sub>۲</sub> + ق<sub>۳</sub> = ج کھنٹے سے جہاں (۱) اور ج دونوں متشاکل ہیں یہ فوراً حاصل ہوتا ہے کہ

(271)

$$ق_۱ = ق_۲ + ق_۳ \quad ۱۷ = ق_۱ - ق_۲ \quad ۱۷$$

جہاں ق<sub>۱</sub> اور ق<sub>۲</sub> دونوں متغیروں لا، لا، لا، لا، لا کے متشاکل تفاعل ہیں۔ نیز یہ بھی واضح ہے کہ گردہ گ، اور گ، ۱۷ کے گردہ یعنی متبادل گردہ کے ساتھ منطبق ہوتے ہیں۔

۲۳۲ - مسئلہ - صرف متبادل تفاعل ہی ن متغیر ہو

وہ غیر متشاکل تفاعل ہیں جنکی ایک قوت متشاکل ہو سکتی ہے۔

اس دفعہ اور دفعات مابعد کے سلسلے جبری مساواتوں کے عام حل کے مسئلہ کے سلسلہ میں بہت اہم ہیں۔ متذکرہ صدر مسئلہ کو مفروض قوتوں کے لئے ثابت کر دینا کافی ہو گا، کیونکہ اگر ایک تفاعل ق<sub>۱</sub> (لا، لا، لا، لا، لا) ایسا موجود ہو کہ ق<sub>۱</sub> متشاکل ہے جس میں ف

مفرد ہے تو ایک تفاعل  $ف = ف$  ایسا بھی ہے کہ  $ف$  متشکل ہے۔ پس فرض کرو

$ف = مس$ ، ایک متشکل تفاعل ہے۔ تمام انتقالات کو شامل نہیں چونکہ  $ف$  کا گردہ، جو غیر متشکل ہے، تمام انتقالات کو شامل نہیں رکھ سکتا اسلئے فرض کرو کہ  $ث = (لا لا)$  وہ انتقال ہے جو  $ف$  کو  $ف$  میں تبدیل کرتا ہے۔ پس

$ف = ف = مس$

اور اسلئے  $ف = س$ ، جہاں  $س$ ، اکائی کی  $ف$  میں اصل ہے۔

پس  $ث = ف = ف$ ،  $س = ف$

اور پھر  $ث$  سے عمل کرنے سے

$ث = ف = س = ف = س$

لیکن  $ث = ۱$ ،  $اس$  لے  $س = ۱$ ، اور اسلئے  $ف = ۲$ ۔

پس چونکہ  $ف$  متشکل ہے،  $ف$  ایک متبادل تفاعل ہے اور مسئلہ ثابت ہے۔

۲۳۳۔ مسئلہ۔ غیر تابع عناصر کی کسی تعداد  $n$  کے لئے (272)

کوئی کثیر قسیمی تفاعل ایسا نہیں ہے جسکی ایک قوت دو قسیمی ہو

جبکہ  $n < ۴$ ، اور  $n = ۳$  یا  $n = ۴$  کے لئے اگر ایسی کوئی قوت ہے تو وہ تیسری قوت ہے۔

اپنی توجہ صرف مفرد اعداد تک محدود رکھ کر فرض کرو کہ  $ف$  ایک ایسا کثیر قسیمی تفاعل ہے جسکی  $ف$  میں قوت دو قسیمی ہے تو (موجب فہ ۲۳۱)

نہ = س + س + س + س (۱)

نہ کے گروہ میں تیسرے رتبہ کے تمام دائری ابدالات شامل نہیں ہو سکتے کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو یہ گروہ متبادلہ گروہ کے ساتھ منطبق ہوتا اور نہ دو قیمتیں ہوتا (مثال ۷ دفعہ ۲۲۶)۔ فرض کر دو کہ نہ = (لا لا لا لا) ایسا ایک ابدال ہے جو نہ کے گروہ میں شامل نہیں ہے اور فرض کر دو کہ نہ = نہ ز۔ چونکہ نہ کے عمل سے س + س + س + س نہیں بدلتا اس لئے مسادات (۱) سے حاصل ہوتا ہے

نہ = نہ ز

پس نہ ز = نہ ف، جہاں نہ اکائی کی ف، ویں اصل ہے۔ پھر متواتر دو مرتبہ نہ کا عمل کرنے سے فوراً حاصل ہوگا

نہ نہ = نہ ف

نہ نہ نہ = نہ نہ ف = نہ نہ ف

نہ نہ نہ نہ = نہ نہ نہ ف = نہ نہ نہ ف

پس چونکہ نہ = ۱، اس لئے نہ = ۱ اور اس لئے نہ = ۳۔ اگر عناصر کی تعداد ۴ سے بڑی ہو تو پانچویں رتبہ کے دائری ابدالات ہونگے اور یہ سب، نہ کے گروہ میں شامل نہیں ہو سکتے (مثال ۸ دفعہ ۲۲۶)۔ فرض کر دو کہ اس گروہ میں نہ شامل ہونیوالے ایسے ابدالات میں سے ایک نہ ہے اور نہ نہ = نہ ز۔ حسب سابق اس ابدال سے مسادات (۱) پر عمل کریں (جس سے مسادات کی بائیں جانب متاثر نہیں ہوتی) تو حاصل ہوگا

نہ = نہ ز = س + س + س + س

پس حسب سابق عمل کو جاری رکھنے سے تہ فہ = سہ فہ اور  
پھر اسپر اور اس کے بعد حاصل ہونیوالی مساد اتوں پر تہ سے عمل  
کرنے سے معلوم ہوگا کہ تہ فہ = سہ فہ، پس سہ = ا کیونکہ

(273)

۵ = ا اور یہ ثابت ہو چکا کہ ف = ۵ - اب چونکہ یہ نتیجہ ف کی  
سابق میں حاصل کردہ قیمت یعنی ۳ کے ساتھ مطابقت نہیں رکھتا  
اس لئے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ جب عناصر کی تعداد ۴ سے بڑی  
ہو تو کوئی ایسا کثیر قیمتی تفاعل فہ معلوم کرنا ناممکن ہے جسکی ایک  
مفرد قوت دو قیمتی ہو۔

لیکن جب 'ن' ۴ سے بڑا نہ ہو تو ایسے کثیر قیمتی تفاعل میں  
جسکی تیسری قوت دو قیمتی ہے چنانچہ ذیل میں چند مثالیں 'ن' = ۳ اور  
ن = ۴ کے لئے دی جاتی ہیں جن سے یہ بات واضح ہو جائے گی۔  
۱۔ تین عناصر کا وہ کثیر قیمتی تفاعل معلوم کرو جسکی تیسری قوت  
دو قیمتی ہو۔ ہم اس بات کا امتحان کریں گے کہ آیا سادہ ترین خطی تفاعل

فہ = عہ لا + بہ لام + جہ لام  
کے ذریعہ اس سوال کا حل ممکن ہے یعنی آیا مستقل عہ، بہ، جہ ایسے متعین  
ہو سکتے ہیں کہ وہ مطلوبہ شرطوں کو پورا کریں۔

تہ = (لا، لا، لا) لینے اور تہ فہ کو سہ فہ کے ساتھ مائل  
کرنے سے جہاں سہ = ۱ حاصل ہوگا

عہ لا + بہ لام + جہ لا = سہ (عہ لا + بہ لام + جہ لا)  
پس جہ = سہ عہ، بہ = سہ جہ، عہ = سہ بہ

اور فہ = عہ (لا + سہ لا + سہ لا)

عہ = ا لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ نمونہ لا + سہ لا + سہ لا کا  
تفاعل مطلوبہ شرطوں کو پورا کرتا ہے۔ یہ تفاعل چہ قیمتی ہے اور ایسا

مکعب دو قسمتی (مقابلہ دفعہ ۵۹ جلد اول کے ساتھ)۔  
اسی طرح طالب علم آسانی کے ساتھ یہ ثابت کر سکتا ہے کہ نمونہ

$$\text{لا} + \text{سہ} + \text{لا} + \text{سہ} + \text{لا}$$

کے کسی تناظر سے جہاں م کوئی صحیح مدد ہے متذکرہ صدر سوال کا  
حل حاصل ہوگا۔

۴۔ چار عناصر کا وہ کثیر قسمتی تفاعل معلوم کرو جسکی تیسری قوت  
دو قسمتی ہو۔

اس صورت میں واضح ہے کہ نمونہ  $\text{عہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا}$  سے  
کے کسی تفاعل پر ابدال نہ  $\equiv (\text{لا لا لا لا لا})$  کا عمل کر کے ایک جزو ضروری  
سے وضع و بنا ہوئے کی شرط کو پورا کرنا اس وقت تک ممکن نہیں ہے  
جب تک کہ  $\text{عہ} = \text{تہ}$ ۔ اس لئے ہم سادگی میں اس سے بعد والا  
تفاعل یعنی ذیل کے نمونہ کا تفاعل یہ لیتے ہیں:۔

$$\text{عہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا}$$

اس پر نہ کا عمل کرنے سے جو تفاعل حاصل ہوگا وہ

$$\text{عہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا}$$

ہے۔

اب  $\text{عہ لا}$  کو  $\text{عہ لا}$  کے ساتھ مماثل کرنے اور یہ  $\text{جہ لا}$  جہاں  
بجائے  $\text{عہ لا}$  کی قوم میں آئی ہے۔ کہنے سے حاصل ہوگا

$$\text{عہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا}$$

(274)

پھر تیسرے رتبہ کے ایک مختلف ابدال مثلاً  $\text{عہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا} + \text{جہ لا}$  سے  
عمل کرنے اور نہ  $\text{عہ لا}$  کو  $\text{عہ لا}$  سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوگا

فہ = عہ (لا لا لا + سہ لا لا لا) + عہ (لا لا لا + سہ لا لا لا) + سہ لا لا لا  
 حسب سابق فہ کو طہ کے ساتھ مماثل کرنے سے جہاں  
 طہ اکائی کی کوئی اصل ہے فوراً حاصل ہوگا طہ = سہ اور عہ = سہ عہ  
 اور باقی کے رشتے سب ان رشتوں کے ساتھ تطابق رکھتے ہیں۔  
 پس عہ = لینے سے

فہ = لا لا لا + لا لا لا + سہ (لا لا لا + لا لا لا) + سہ (لا لا لا + لا لا لا)  
 یہ مطلوبہ تقابل چھتیتی ہے لیکن اس کا کعب دو قیمتی (مقابلہ  
 دفعہ ۶۶ جلد اول اور مثال ۳ دفعہ ۲۲۶ کے ساتھ)۔

## فصل سوم۔ گیلوا کا محلل

۲۳۴۔ گیلوا کا محلل۔ مساوات کا گروہ۔ فرض کرو کہ مساوات

$$(۱) \quad \text{فا (لا)} = \text{لا} + \text{ب} \text{ لا}^{۱-۵} + \text{ب} \text{ لا}^{۲-۵} + \dots + \text{ب} \text{ لا} + \text{ب} \text{ لا} = ۰$$

کی اصلیں لا، لام، لاء، لام، لان سب کی سب غیر مساوی ہیں اور  
 اس کے سر معلومہ منطق مقادیر میں ہیں۔ اگر سروں میں غیر منطق مقادیر  
 ہوں تو وہ منطق مقادیر سے متعلق ہوتی ہیں یا منطق مقادیر کے ساتھ  
 رکھی جاتی ہیں۔ وہ تمام مقادیر جو اس مجموعہ سے جمع، تفریق، ضرب  
 اور تقسیم کے ذریعہ حاصل ہوتی ہیں ذیل کی بحث میں منطق شمار  
 کی جائیں گی اور منطق کہلائیں گی۔ یا یوں بھی کہا جاسکتا ہے کہ یہ مقادیر

سروں میں شامل ہونیوالے غیر منطبق اعداد کے احاطہ میں واقع ہیں (دیکھو دفعہ ۲۳۶)۔ گیاوا کے تفاعل

۱۔ عم لام + عم عم + ... + عم لان  
 کی مثال گرو کے ن ابدالات کے جواب میں ن مختلف قیمتیں  
 پر 'پہم' 'پہم' 'پہم' (دفعہ ۲۲) - ن ویں درجہ کی مسادات  
 کو جسکی اصلیں یہ ن قیمتیں ہیں یعنی مسادات

(۲) پا (ی) = (ی - چہ)، (ی - چہ)، ..... (ی - چہ) = (۲)

کو گیا لو کا محلل کہا جاتا ہے۔ جب اس مساوات کو پھیلا یا جائے تو  
اس میں اصلیں لا، لا، لا، ..... لان متشاکل شکل میں شامل ہونگی،  
پس پھیلی ہوئی مساوات میں ی کے سب سروں کو ب، اب، ... بن

(275)

کی رقوم میں ناطق طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔ بالعموم یہ مساوات  
تحويل پذیر نہیں ہیں یعنی یہ مساوات نچلے درجہ کے ایسے اجزائے ضربی  
میں نہیں توڑ سکتی جنکے سر منطبق ہوں۔ اب ہم یہ دریافت کرینگے  
کہ وہ کونسی شرطیں ہیں کہ یہ تحويل پذیر ہو جائے۔ اس مقصد کیلئے  
فرض کرو کہ پا (ی) میں روں درجہ کا ایک غیر تحويل پذیر جزو ضربی  
پا (ی) ہے جس کے سر منطبق ہیں اور فرض کرو کہ

(۳)  $(ی-پ), \dots, (ی-پ), (ی-پ) = (ی)$  پ،

جہاں پیہ پیہ... پر تفاعل پیہ سے ابدالات پیہ پیہ... میں  
کے ذریعہ اخذ کئے گئے ہیں۔ ان ابدالات کے لئے حسب ذیل مسئلے  
منابٹ کئے جا سکتے ہیں:-

(۱) اصلوں کا ہر تفاعل کہ جوابدات 'س' 'س' ہے  
... 'س' سے غیر متبدل رہتا ہے 'ب' 'ب' 'ب' 'ب' 'ب' 'ب'  
کی رقوم میں ناطق طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

دفعہ ۲۳۰ نتیجہ صریح ۲ کی رو سے یہ کہو ہے اور اس کے  
سروں کی رقوم میں منطبق طور پر بیان کیا جاسکتا ہے، فرض کرو کہ یہ  
ف (پ) ہے۔ اب ابدالات س، م، ن سے ... سے رکے  
عمل کے تحت نہ بنیں بلکہ لیکن پ، علی التواتر پی، پی، پی، ...  
ہو جاتا ہے۔ اس لئے

(۲) ہر وہ تفاعل جو ناطق طور پر بیان ہو سکتا ہے ابدالات

اے اے اے... س سے غیر متبدل رہیگا۔

فرض کرو کہ اصولوں کا ایک تفاعل نہ ہے جو مناطق طور پر بیان ہو سکتا ہے مثلاً اس سے 'اور فرض کرد کہ ف (پیر) پیر کا وہ تفاعل ہے کہ اس سے بھی نہ تعبیر ہو سکتا ہے (صفحہ ۲۳۰)۔

تب ف (پہ) = س، اس لئے مساوات ف (پہ) = س۔ اور مساوات پا (پہ) = میں ایک اصل یہ مشترک ہے لیکن موصوفہ الذکر مساوات ناخوہل پذیر ہے اور اس لئے اسکی سب اقلیں دونوں مساواتوں میں مشترک ہونی چاہئیں اور اس لئے یہ کی بجائے پہ، پہ، .... درج کرنے پر







یہہ ابدال ت میں پ پر کو ت میں چ پر میں تبدیل کر دیتا ہے اور اس لئے ت پر، ت میں پ پر، ... ت میں ر پر کے کسی تفاعل میں ان متغیروں ت پر، ت میں پ پر، ... ت میں ر پر کی ترتیب میں ابدال میں وہی تغیر پیدا کرتا ہے جو تغیر وہ پ پر، پ پر، ... پ پر کے اس تفاعل میں پ پر، پ پر، ... پ پر کی ترتیب میں پیدا کرتا ہے۔ پس یہ کی قیمتوں کو ایسے جٹوں میں ترتیب دیا جاسکتا ہے کہ کسی جٹ کی قیمتوں کا کوئی متماثل تفاعل ابدالوں کے ایک رتبہ والے گردہ کے ارکان سے تبدیل نہیں ہوتا۔ پس گیا لو کے محل کے ت اجزائے ضربی تحلیل پذیر ہوں یا نہوں ان کو ایسے ت اجزائے ضربی میں ترتیب دیا جاسکتا ہے جتنا درجہ ہو اور ہر ایک جزو ضربی کا وہی ایک رتبہ والا گردہ ہو۔ لا، لا، ... لا کے کسی ت قیمتی تفاعل کی قیمتوں پر، پ پر، ... پ پر کی یہ ترتیب متماثل گردہوں کے ت ابدالوں میں جٹوں میں ترتیب کے (صفحہ ۲۲۶) کی طرح متناظر ہے لیکن رتبہ والے گردہ گ کے ارکان میں پ، پ، ... پ کو ح سے ضرب دینے کی بجائے ہم ح کو میں، میں، ... میں سے ضرب دیتے ہیں۔ میں، میں، ... میں سے متعلق پ کی قیمتوں کا ایک ایسا جٹ میں، پ پر، ... میں پر ہے کہ انکا کوئی متماثل تفاعل گ کے ابدالوں سے غیر متبادل رہتا ہے۔





جہاں  $پ = عم لا + عم لام + عم لاء = عم لا + عم لا + عم لا = (۲۳۱) پ$

$پ = عم لا + عم لام + عم لاء = (۳۲۱) پ$

پس (278)

$۳ (ف ق + ق + ب ب) = ۱۰ پ$ ،  $۳ (س ف ق + ق + س ف ق)$

$۲ = ب ب ب$

$۳ (س ف ق + س ف ق + ب ب) = پ$

اب  $۱۰ پ = ۳ ب ب = ۳ ی = ۳ (ف ق + ق + ف ق)$  رکھنے سے

$ی = ۲ ف ق + ۲ ق + ۳ ف ق ق (ف ق + ق + ف ق)$

$= ۱ (گ گ + ۱۰ ۵ ۵) + ۳ ۵ ۵ ی$

اس لئے  $پ$  مساوات  $ی = ۳ ۵ ۵ ی - ۱ (گ گ + ۱۰ ۵ ۵) = ۱۰ کو$

پورا کرتا ہے اور طریق عمل سے ظاہر ہے کہ  $پ = ۳ ی$  بھی اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ پس اگر

$۱۰ ۵ ۵ = ۳ ب ب = ۳ ی$

تو  $۱۰ ۵ ۵ = (پ - ۱۰ ۵ ۵) = ۱۰ ۵ ۵ ی - ۱۰ ۵ ۵ ی$

$= ۱ (گ گ + ۱۰ ۵ ۵)$

اس لئے اگر  $۵ ۵$  کامل مربع ہو تو  $ی$  میں مساوات منطبق ہے اور گیا لو کا محل ایک منطق جزو ضروری رکھتا ہے جس کا گروہ متبادله گروہ یعنی  $(۲۳۱)$

$(۳۲۱)$  ہے۔

دوسرا جزو ضروری معلوم کرنے کے لئے  $ف ق$  اور  $ق ق$  کی قیمت

دریافت کرنے سے مذکورہ بالا طریقہ پر ذیل کے رشتے حاصل ہوتے ہیں،

$۳ (ف ق + ق + ب ب) = ۱۰ پ$ ،  $۳ (س ف ق + س ف ق + ب ب) = ۱۰ پ$



۲۔ چوبیسویں درجہ کی وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں گیلوا کے

تفاعل

عم، لام، + عم، لام، + عم، لام، + عم، لام

کی مختلف قیمتیں ہوں۔ نیز وہ شرطیں متعین کرو کہ مطلوبہ مساوات ایسے منسلق اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکے جنکو دو پارہ درجیوں کے سروں کی رقوم میں جنکی اصلیں لا، لام، لا، لام، لا، لام اور عم، عم، عم، عم ہیں بیان کیا گیا ہو جہاں چار درجہ جی حسب ذیل ہیں۔

(۱) (د، ب، ج، د، ص) (لا، ا)

(۲) (د، ب، ج، د، ص) (لا، ا)

اصلوں لا، لام، لا، لام، لا، لام کو شغل

د، لام، ب = د، لام، ب + د، لام، ب = د، لام، ب + د، لام، ب - د، لام، ب - د، لام، ب

د، لام، ب = د، لام، ب - د، لام، ب = د، لام، ب - د، لام، ب = د، لام، ب - د، لام، ب

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں د، لام، ب = د، لام، ب - د، لام، ب - د، لام، ب - د، لام، ب مساوات

(28)

د، لام، ب + د، لام، ب + د، لام، ب + د، لام، ب = د، لام، ب - د، لام، ب - د، لام، ب - د، لام، ب - د، لام، ب

کی اصلیں ہیں۔ عم، عم، عم، عم کو اسی طرح د، لام، ب، د، لام، ب، د، لام، ب کی رقوم

میں بیان کرنے سے جہاں بیہ، بیہ، بیہ، بیہ اُس متناہ مساوات کی اصلیں

ہیں جو اوپر کی مساوات میں حرفوں پر علامت زبر لگانے سے حاصل ہوئی

ہے اور جہاں د، لام، ب، د، لام، ب، د، لام، ب = د، لام، ب - د، لام، ب - د، لام، ب - د، لام، ب



$$۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ - لآ - لآ - لآ) \quad ۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ + لآ - لآ - لآ)$$

$$۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ - لآ - لآ + لآ)$$

$$۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ - لآ - لآ + لآ) \quad ۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ + لآ - لآ - لآ)$$

$$۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ - لآ - لآ + لآ)$$

اس لئے

$$۱۶ \text{ لآلآ لآلآ} = ۴ (لآ - لآ - لآ + لآ) \quad ۱۶ \text{ لآلآ لآلآ} = ۴ (لآ + لآ - لآ - لآ)$$

$$۱۶ \text{ لآلآ لآلآ} = ۴ (لآ - لآ - لآ + لآ) \quad ۱۶ \text{ لآلآ لآلآ} = ۴ (لآ + لآ - لآ - لآ)$$

جہاں

$$۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ - لآ - لآ + لآ) \quad ۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ + لآ - لآ - لآ)$$

$$۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ - لآ - لآ + لآ) \quad ۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ + لآ - لآ - لآ)$$

$$۴ \text{ لآلآ لآلآ} = ۴ (لآ - لآ - لآ + لآ) \quad ۴ \text{ لآلآ لآلآ} = ۴ (لآ + لآ - لآ - لآ)$$

متناظر قیمتیں ۴، ۴، ۴ کے لئے ملتی ہیں جہاں متناظر علامتیں

حسب ذیل ہیں

$$(+) (+) (+) (-) (-) (-) (-) (-) (-)$$

$$۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ - لآ - لآ + لآ) \quad ۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ + لآ - لآ - لآ)$$

$$۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ - لآ - لآ + لآ) \quad ۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ + لآ - لآ - لآ)$$

$$۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ - لآ - لآ + لآ) \quad ۴ \text{ لآلآ} = ۴ (لآ + لآ - لآ - لآ)$$



۱۵ منطق ہے۔

(281)

اب چونکہ  $\text{چم} = \text{پ}^۱ + \text{پ}^۲ + \text{پ}^۳ + \text{پ}^۴$  متغیروں  $\text{پ}^۱$ ،  $\text{پ}^۲$ ،  $\text{پ}^۳$ ،  $\text{پ}^۴$  کا ایک چہمیتی تفاعل ہے اس لئے دفعہ ۲۲۹ کی رو سے  $\text{چم}$  کے ایک ایسے منطق صحیح تفاعل کے مساوی ہے جس کا درجہ ۵ ہے اور جو  $\text{چم} = ۳(۵\text{ھ})$   $(\text{ط} + \text{ط})$  سے پورا ہونے والے کعبی (۲) کے ذریعہ سے ایک دوسرے درجہ کے تفاعل میں تحویل ہو سکتا ہے۔

پس  $\text{ل}^۱ \text{و}^۱ \text{ف}^۱ = ۲(\text{ب}^۱ + \text{ی}^۱)$  رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ  $\text{ف}^۱$ ،  $\text{ف}^۲$ ،  $\text{ف}^۳$ ،  $\text{ف}^۴$  مساوات

$\text{ی}^۱ - ۲\text{پ}^۱ - \text{ی}^۲ - ۲\text{گ}^۱ - \text{ی}^۳ + \text{ف}^۱ + \text{ق}^۱ + \text{پ}^۱ + \text{س}^۱ = ۰$  (۳)

کی اصلیں ہیں جہاں  $\text{ف}$ ،  $\text{ق}$ ،  $\text{س}$  میں غیر منطق مقدار ہاں ۱۵ خطی طور پر شامل ہوتی ہے۔

(۲) اور (۳) سے  $\text{پ}^۱$  کو ساقط کرنے پر  $\text{ی}^۱$  میں ایک ۱۲ ویں درجہ کی مساوات ملتی ہے جس میں ہاں ۱۵ شامل ہوتا ہے اور اگر ۵ کامل مربع ہے تو اس مساوات سے ہمیں گیا لو کے محلل کا ایک منطق جزو ضربی ملتا ہے۔

چونکہ  $\text{پ}^۱$  کے کعبی (۲) کی دوسری اصلیں  $\text{پ}^۱$ ،  $\text{پ}^۲$ ،  $\text{پ}^۳$  کو حاصل کرنے کے لئے  $\text{پ}^۱$  پر ابدالوں (۲۳۱)، (۳۲۱) کا عمل کرنا پڑتا ہے جبکہ  $\text{پ}^۱$  کو  $\text{پ}^۱$ ،  $\text{پ}^۲$ ،  $\text{پ}^۳$  کا تفاعل سمجھا جائے اور چونکہ  $\text{لا}^۱$ ،  $\text{لا}^۲$ ،  $\text{لا}^۳$ ،  $\text{لا}^۴$  کی رقومیں  $\text{پ}^۱$ ،  $\text{پ}^۲$ ،  $\text{پ}^۳$ ،  $\text{پ}^۴$  کے لئے جو جملے ہیں ان میں  $\text{پ}^۱$  کو  $\text{پ}^۱$  میں،  $\text{پ}^۲$  کو  $\text{پ}^۲$  میں،  $\text{پ}^۳$  کو  $\text{پ}^۳$  میں بدلنے کا اثر  $\text{لا}^۱$  کو  $\text{لا}^۱$  میں،  $\text{لا}^۲$  کو  $\text{لا}^۲$  میں،  $\text{لا}^۳$  کو  $\text{لا}^۳$  میں بدلنے کے معادل ہے اس لئے  $\text{ف}^۱$ ،  $\text{ف}^۲$ ،  $\text{ف}^۳$ ،  $\text{ف}^۴$  کی  $\text{پ}^۱$ ،  $\text{پ}^۲$  سے متعلق دوسری قیمتیں حاصل کرنے کے لئے

فہ<sup>۱</sup>، فہ<sup>۲</sup>، فہ<sup>۳</sup> پر ابدالوں (۴۳۲) اور (۴۲۳) کا عمل کرنا پڑتا ہے اور اس طرح ۱۲ قیمتیں ملتی ہیں جن کا گروہ متبادل گروہ ہے۔ اسی طرح چونکہ پیر<sup>۱</sup>، پیر<sup>۲</sup>، پیر<sup>۳</sup> کا کبھی جملہ (۲) میں ۱۵ کی علامت بدلنے سے حاصل ہوتا ہے کیونکہ پیر<sup>۱</sup>، پیر<sup>۲</sup>، پیر<sup>۳</sup> کو حاصل کرنے کے لئے پیر<sup>۱</sup> میں علی الترتیب لم کو لم سے، لم کو لم سے، لم کو لم سے بدلنا پڑتا ہے اس لئے پیر<sup>۱</sup>، پیر<sup>۲</sup> کے کبھی سے متعلق فہ<sup>۱</sup> کی ۱۲ قیمتیں ہیں جو فہ<sup>۱</sup>، فہ<sup>۲</sup>، فہ<sup>۳</sup> پر (۴۲)، (۴۳)، (۳۲) کا عمل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔ اگر سروں کے منطق احاطہ میں ۱۵ کا بھی اضافہ کر دیا جائے تو چار درجہ کا گروہ متبادل گروہ بن جاتا ہے۔ مزید بریں اگر اس احاطہ میں پیر<sup>۱</sup> والی مساوات کی ایک اصل کا بھی اضافہ کر دیا جائے تو گروہ ۱، (۲۱)، (۳۱)، (۳۲)، (۴۱)، (۴۲)، (۴۳) ہو جائیگا اور ہم دیکھتے ہیں کہ چونکہ پیر<sup>۱</sup> کی قیمتیں کسی ایک قیمت کی رقوم میں ناطق طور پر بنائیں گے (دفعہ ۲۳۰ - نتیجہ ۲) اس لئے کیا لو اس کے عقل کے دوسرے منطق اجزائے ضربی وہ پانچ جملے ہیں جو (۳) میں پیر<sup>۱</sup> کی بجائے پیر<sup>۲</sup>، پیر<sup>۳</sup>، پیر<sup>۴</sup>، پیر<sup>۵</sup>، پیر<sup>۶</sup> درج کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم اپنی بھی تصدیق کر سکتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک چیز ضربی کا گروہ ۱، (۲۱)، (۳۱)، (۳۲)، (۴۱)، (۴۲)، (۴۳) ہے کیونکہ کسی ابدال سے تشکیل کرتے پر یہ گروہ غیر متبادل رہتا ہے۔

۳۔ وہ شرطیں معلوم کر دو کہ پانچ درجہ کی صورت میں کیا لو کا عقل اجزاء ضربی میں تحلیل ہو جائے ان شرطوں کو معلوم کریں گے۔ لئے ہم کیا لو کے تفاسیر یہ = لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا کی بجائے گہنی ۱۰۰ اسی تفاسیر استعمال کر سکتے ہیں اور بالخصوص یہ کی ۱۰۰ شکل استعمال کر سکتے ہیں جو عدد کی بجائے عدد رکھنے سے حاصل ہوتی ہے جہاں عدد اکائی کا خیالی پانچواں جزو ہے۔





دو درجی میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔ سات درجی کی صورت میں گیا لہو کے محل پر اگر اس طرح کا عمل کیا جائے تو سات درجی ۱۲۰ چہ درجیوں میں تحویل ہوگا۔

## فصل چہارم۔ مساواتوں کا جبری حل

۲۳۵۔ مساواتوں کے جبری حل پر نظریہ ابدالات کا اطلاق

کسی جبری مساوات کو حل کرنے کا مسئلہ اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے: ایک قیمتی تفاعلات  $B + B \rightarrow B + B$  (یعنی مساوات کے سروں) کی دی ہوئی قیمتوں کے ذریعہ ایک قیمتی تفاعل کی قیمت یعنی گیا لہو اس کے محل کی ایک اہل کو معلوم کرنا کیونکہ ہم نے دیکھا ہے (دفعہ ۲۲۰ نتیجہ سرچ ۳) کہ  $B + B \rightarrow B + B$  میں سے ہر اصل مطلق طور پر گیا لہو کے کسی تفاعل کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہے۔ اگر یہ دئے ہوئے رقوم کی رقوم میں اصولوں کو عملی طور پر معلوم کرینا کام اس طریقہ عمل سے آسان نہیں ہو جاتا تاہم اس مسئلہ کو شکل بالائیں بیان کرنا عام جبری مساواتوں کے حل کے امکان کی بحث میں اہم ہے۔

(283)

چنانچہ کبھی اور چار درجی کے معلومہ حل اس نقطہ نظر سے اختصاراً یوں پیش کئے جاسکتے ہیں:-

(۱) کبھی مساوات

$$B + B + B + B = 0$$

کی صورت میں دئے ہوئے یک قیمتی تفاعلات  $B + B \rightarrow B + B$  سے شکل

$$B + B + B + B = 0$$

کا ایک چہ قیمتی تفاعل جذروں کے نکلنے کے عمل کے ذریعہ معلوم کرنا

اولاً تمام دو قیمتی تفاعل ناطق طور پر اس دو قیمتی تفاعل

$$\Delta V = \pm (1, 1) (1, 1) (1, 1) (1, 1)$$

کی رقوم میں (دفعہ ۲۲۹) اور اس لئے 'ب'، 'ب'، 'ب' اور 'ب' کے ایک معلومہ تفاعل کے جذر المربع کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں (دفعہ ۴۲ جلد اول)۔ اب ہمیں ایک چھ قیمتی تفاعل  $1, 1 + 1, 1 + 1, 1 + 1, 1$  سے لایا

$\equiv$  پیہ معلوم ہے جس کا مکعب دو قیمتی ہے (دفعہ ۲۳۳ مثال ۲)۔ اس لئے یہ خود، سروں کے ایک تفاعل کے جذر الکعب اور اوپر ذکر کئے ہوئے جذر المربع کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے (دیکھو دفعہ ۵۹ جلد اول)۔ اس طرح ایک چھ قیمتی تفاعل حاصل ہو جانے کے بعد مساوات کا حل نظری طور پر مکمل ہو جاتا ہے۔

(۲) چار درجی مساوات

$$1, 1 + 1, 1 + 1, 1 + 1, 1 = 0$$

کی صورت میں اس شکل

$$1, 1 + 1, 1 + 1, 1 + 1, 1$$

کا ایک چوبیس قیمتی تفاعل 'یک قیمتی تفاعل'  $1, 1 + 1, 1 + 1, 1 + 1, 1$  سے جذروں کو نکالنے کے عمل کے ذریعہ معلوم کرنا ہے۔

گذشتہ صورت کی طرح کوئی دو قیمتی تفاعل ناطق طور پر 'ب'، 'ب'، 'ب' کی اور دو قیمتی تفاعل  $1, 1 + 1, 1 + 1, 1 + 1, 1$  کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے اور اس لئے

وہ ان سروں کی اور سروں کے ایک تفاعل کے جذر المربع کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے (مثال ۱۵ صفحہ ۱۸۶ جلد اول)۔ اب دفعہ ۲۳۳ مثال ۴



ہیں یہ چہ قیمتی تفاعل

$$\text{فہ} \equiv \text{لا لا لا} + \text{لا لا لا} + \text{سہ} (\text{لا لا لا} + \text{لا لا لا})$$

معلوم ہے جسکی تیسری قوت دو قیمتی ہے۔ پس سروں کے ایک معلومہ تفاعل کے جذرا لکعب کی مدد سے فہ بیان ہو سکتا ہے۔ اب ہمیں وہ ذریعہ تلاش کرنا ہے کہ اس چہ قیمتی تفاعل سے ایک ۲۴ قیمتی تفاعل پہنچ سکیں۔ فہ کا گروہ حسب ذیل ہے (مثال ۳ دفعہ ۲۲۶)

$$\text{ھ} \equiv [1, (21), (23), (31), (32), (34), (35)] \text{ (غہ = ۶، ر = ۴)}$$

اور اسی گروہ سے متعلق ایک دوسرا تفاعل

$$\text{طہ}^2 \equiv (\text{لا} + \text{لا} - \text{لا} - \text{لا}) (\text{لا لا لا} + \text{لا لا لا})^2$$

ہے۔

یہ تفاعل نا طلق طور پر فہ کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے، اور اسلئے طہ کی قیمت سروں کی رقوم میں ایک اور جذرا المربع کی مدد سے حاصل ہوئی ہے۔ طہ کا گروہ

$$[1, (21), (23), (33)] \text{ (غہ = ۱۲، ر = ۲)}$$

ہے اور اس گروہ سے تفاعل

$$\text{پہ}^2 \equiv \{ \text{عم} (\text{لا} - \text{لا}) + \text{عم} (\text{لا لا} - \text{لا لا}) \}$$

بھی متعلق ہے۔ پس پہ کو طہ کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے، اور بالآخر پہ جو ۲۴ قیمتی تفاعل ہے ایک دوسرے جذرا المربع کی مدد سے حاصل ہو جاتا ہے۔

اس عمل کو جو ان دو صورتوں میں واضح کیا گیا ہے اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے کہ وہ سروں کے منطق احاطہ میں معین اہم مقداروں کے



(286)

۲۳۷۔ جبری طور پر حل پذیر مساواتوں کی اصلوں کی شکل۔

اگر ف (لا) = ایک مساوات ہو جس کے منطق علاقہ (مسا، مسا، مسا) میں شامل ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ یہ مساوات جبری طور پر حل پذیر ہے جبکہ لا کی بجائے ایک ایسے جملہ کے درج کرنے سے اس مساوات کا پورا ہونا ممکن ہو جو علاقہ (مسا، مسا، مسا) کے اندر کے عناصر سے جبر و متقابلہ کے حسب ذیل اعمال کے ذریعہ بننا ہو۔  
جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، صحیح عددی تو توں پر اٹھانا، صحیح عددی جذر نکالنا، جبکہ ان اعمال کی تعداد محدود ہو۔  
لا کی وہ قیمت جو اس طرح متعین ہو علاقہ (مسا، مسا، مسا)























نہیں گئے ہیں، اور اب یہ بتایا جائیگا کہ ہم منطق علاقہ (و، و، ف، ق) کا ایک حصہ ہے۔

مساواتوں (۱۲) کے سلسلہ سے حاصل ہوتا ہے

$$(و، و، و) = (ق، ق، ق) - (و، و، و) = (ف، ف، ف)$$

اسلئے  $و، و، و = ف، ف، ف$

$$پس \quad و، و، و = (ف، ف، ف) - (ق، ق، ق) = (و، و، و) - (ق، ق، ق)$$

اور اسلئے  $و، و، و$  علاقہ (و، و، ف، ق) کا ایک حصہ ہے۔

اسلئے مساواتوں (۱) کا سلسلہ

$$\begin{aligned} و، و، ق + ق، ق، و = و، و، ق + ق، ق، و = (و، و، ق) - (و، و، و) \\ = (و، و، ق) - (و، و، و) = (و، و، ق) - (و، و، و) \end{aligned}$$

میں تحویل ہو جاتا ہے۔

دوسری دو اصلیں سلسلہ ۱ کے آخری عنصر و، کی بجائے

سے و، اور سہ سے و، رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں، چنانچہ

$$لا = سہ + و، + (ق، ق، و) - (و، و، و) = سہ + و،$$

$$لا = سہ + و، + (ق، ق، و) - (و، و، و) = سہ + و،$$

اب ہم عام بحث پر عود کرتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$لا = گ، و، و + گ، و، و + گ، و، و + \dots + (۱)$$



ہر ایک یا بارہ کی ہر قیمت کے لئے ۱۰ حلوں کا ایک ہی  
 وزیر حاصل ہو۔ یعنی کی صورت میں  $پ = ۳$ ،  $پ = ۲$  کے لئے  
 ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو تین قیمتیں حاصل ہوتی  
 ہیں۔ یا ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کی صورت میں  $پ = ۱$ ،  $پ = ۲$ ،  $پ = ۳$  کے لئے  
 ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔  
 کی ہر قیمت کے لئے ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

اس طرح محسوب کر کے پھر ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰  
 قیمتیں ملتی ہیں۔ ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔  
 ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔  
 ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔  
 ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔  
 ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔  
 ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔  
 ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔  
 ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ کے لئے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔





ہم جن نتیجوں پر پہنچے ہیں انکو اکٹھا کرنے سے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے :-

مسئلہ :- اگر مساوات ف (لا) = جس کے سر مقداروں  
 'ر' 'ر' ... کے منطق تفاعل ہیں ایک جبری تفاعل  
 لا = فا (و، و، ...، و، و، 'ر' 'ر' ...)

سے پوری ہو سکتی ہو تو مقادیر و، اصلوں کے اور اکائی کے  
 ابتدائی جذروں کے منطق صحیح تفاعل ہیں، مزید بریں یہ مقداریں  
 اس شکل

و، و، ...، و، و، 'ر' 'ر' ...)

کی مساواتوں کے ایک سلسلہ سے متعین ہوتی ہیں۔ اس  
 سلسلہ میں قوت نامہ سب کے سب مفرد اعداد ہیں اور  
 تفاعل فاسب کے سب منطق ہیں۔

مذکورہ بالا مسئلہ کی زد سے یہ ممکن ہو جاتا ہے کہ ابدالات  
 کے نظریہ کا اطلاق اس مسئلہ پر کیا جائے کہ وہ عام مساواتیں جنکا درجہ  
 چار سے بڑا ہے جبری طور پر ناقابل حل ہیں۔

اس مسئلہ کا ثبوت ذیل میں درج ہے۔  
 یہ بتایا جا چکا ہے کہ پہلا غیر منطق تفاعل و، و، ایک تفاعل کا جو  
 علاقہ ('ر' 'ر' ...) میں منطق ہے پ والے جذر ہے، اور چونکہ و، اصلوں کا  
 ایک ایسا منطق تفاعل ہے کہ و، متشکل ہے اسلئے دفعہ ۲۳۲ کی

روسے وہ، مینر  $\Delta$  کا جذر المربع ہے یا اسکی شکل میں  $\Delta$  ہے جس میں  
میں اصولوں کا ایک متشاکل تفاعل ہے۔ اسلئے  $\omega = 2$ ۔  
اگر ہم میں  $\Delta$  کو منطق علاقہ میں شریک کریں تو اس کے  
یہ معنی ہونگے کہ ہم نے اصولوں کے تمام ایک قیمتی اور دو قیمتی تفاعلوں  
شامل کر لیا ہے۔ ایک قدم اور آگے بڑھنے سے اصولوں کا ایک  
منطق تفاعل قسم ہو نا چاہئے جو ۲۔ ۱ قیمتی ہے اور جسکی پیدائش  
وہ قوت دو قیمتی ہے، لیکن ایسا کوئی تفاعل موجود نہیں ہوتا جبکہ  
(ن ۴) دفعہ ۲۳۳۔ پس وہ عمل جس کے ذریعہ ہم اصولوں تک پہنچ  
سکتے ہیں جاری نہیں رکھا جاسکتا۔

اسلئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ وہ عام مساوات جسکا درجہ  
چار سے بڑا ہے جبری طور پر حل نہیں کیجا سکتی۔

نیٹو (Netto) نے اس سوال پر اپنی کتاب "Substitutionen" میں  
میں باقاعدہ بحث کی ہے اور ہم نے اوپر کی تحقیقات میں اسی کا اتنا  
کیا ہے۔ وہ اصول جن پر اس تحقیقات کا دار و مدار ہے آئیل کے  
دریافت کئے ہوئے ہیں۔ آئیل ہی پہلا شخص تھا جس نے باقاعدہ  
طور پر ان مساواتوں کے جبری حل کا عدم امکان ثابت کیا ہے جنکا  
درجہ چار سے بڑا ہو۔ اس نے اس دفعہ کے بنیادی مسئلہ کو اس شکل  
میں بیان کیا تھا: اگر کوئی جبری مساوات جبری طور پر حل پذیر ہے  
تو ہم ہمیشہ اصل کو ایسی شکل دے سکتے ہیں کہ وہ تمام جبری تفاعل  
جن سے یہ ترکیب پاتی ہے دی ہوئی مساوات کی اصولوں کی قوم میں ناطق طور پر  
بیان کیے جاسکتے ہیں (آئیل کی کتاب "Euvres Completes")

جلد اول صفحہ ۵۰۵۔ یہ مسئلہ جس طریقہ پر سندریہ بالا ثبوت میں استعمال ہوا ہے آبل کے ثبوت سے ذرا مختلف ہے۔ اس کے ثبوت میں اس قسم کی ترمیم وانٹزل (Wantzel) نے کی تھی۔ وانٹزل نے دفعات ۲۲۲ اور ۲۳۳ کے مسائل بھی جو نظریہ ابدالات سے متعلق ہیں دریافت کئے۔ دیکھو سیر (Serret) کا کتاب "Cours d'Algebre" ص ۴۸۴۔ ابدالات اور گرد ہوں سے متعلق مزید معلومات کے لئے دیکھو "The Theory of Groups" مولفہ پروفیسر ڈیویو۔ برٹسائڈ مطبوعہ کیمبرج ۱۹۱۱ء اور "The Theory of Equations" مولفہ پروفیسر کجوری (Cajori) مطبوعہ نیویارک ۱۸۸۹ء۔

جس میں مناسب معلوم ہوتا ہے کہ آبل کی مساواتوں پر ایک فصل کا اضافہ کیا جائے کیونکہ مختلف طریقوں سے یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ گیلوا کا محاسبہ یا توئی اور مساوات جس کی حل میں ایک مساوات  $f(x) = 0$  کی اس کے لئے  $f(x) = 0$  کے کسی نہ کسی تغاقل کی قیمتیں ہیں آبل کے نمونہ کی مساواتیں ہیں۔ اور اس لئے اس نمونہ کی مساواتوں کا حل  $f(x) = 0$  کے حل کے علاوہ ایسی مساواتیں کے حل پر بھی منحصر کیا جاسکتا ہے جن کا درجہ  $n$  سے کم ہے۔



ابدال ہے تو دفعہ ۲۲۹ کی رو سے  $س قہ = طہ (قہ)$  جہاں طہ درجہ ۱۔ اکا ایک منطبق صحیح تفاعل ہے جو  $قہ$  اور  $س قہ$  سے کسی ابدال ت سے اخذ کئے ہوئے اصولوں کے ہر زوج کے لئے وہی ہے۔ پس  $س قہ = طہ (قہ)$ ۔ یہ آخری نتیجہ اس طرح سے بھی حاصل ہو سکتا ہے کہ ہم  $س قہ = طہ (قہ)$  کو  $لا، لا، لا، لا$  میں ایک متماثلہ خیال کریں جو ف (لا) کے سروں کی بجائے اصلونگی رقوم میں متشاکل تفاعل درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور اس لئے  $س قہ = طہ (قہ)$  سے حاصل ہوتا ہے

$س قہ = طہ (قہ) = طہ (قہ)$  اب  $س$  کی کوئی خاص قوت اکائی کے مساوی ہے۔ فرض کر دو کہ  $س = ۱$  اور اصولوں کو ف ارکان کے جڑوں میں ترتیب دو جنہیں سے ہر جڑ ذیل کے نمونہ کا ہو۔

$قہ، س قہ، س قہ، س قہ، س قہ، س قہ، س قہ، س قہ$

جہاں پہلے جڑ کے لئے ہم  $قہ = ۱$  لیتے ہیں اور ہر بعد والے جڑ کیلئے  $قہ$  کی قیمت کے طور پر وہ ابدال لیتے ہیں جو اس سے پہلے نہ لیا گیا ہو۔ یہ عمل ہم اس وقت تک جاری رکھتے ہیں کہ تمام ابدالات ختم ہو جائیں جیسا کہ ہم نے دفعہ ۲۲۶ میں کیا تھا۔ اب چونکہ  $س قہ = طہ (قہ)$  اس لئے  $قہ$  کی بجائے  $س قہ$  رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے  $س قہ = طہ (س قہ)$  اس لئے

$س قہ = طہ (قہ)$  کے ساتھ ہمیں ذیل کے رشتے ملتے ہیں:-  
 $س قہ = طہ (س قہ) = طہ (قہ) = س قہ = طہ (س قہ) = س قہ = طہ (س قہ)$

وغیرہ۔ یہ سلسلہ  $ت فم = س ف ت فم = طه (س ف ت ف) پر ختم$   
ہوتا ہے اور اس لئے  $فا (فہ) = آبل$  کی مساوات ہے۔

(297)

۲۴۲۔ آبل کی عام مساوات کا حل۔ آبل کی مساوات کی اصلیں اس طرح حاصل کی جاسکتی ہیں کہ درجہ  $ف$  والی ایک ایسی مساوات حل کی جائے جس کے سر ایک  $م$  درجہ والی مساوات کی ایک اصل کے منطق صحیح تفاعل ہوں۔ اس خاص صورت میں جبکہ  $ف = ۳$  اور  $م = ۴$  ہم اس مسئلہ کو ثابت کریں گے۔ یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ مسئلہ بالعموم صحیح ہے۔

فرض کرو کہ  $ق = (لا، لا، لا، لا، لا)$  پہلے جٹ کی تین اصلوں  $لا، لا، لا$  کا ایک منطق متشاکل تفاعل ہے،  $ق$  دوسرے جٹ کی تین اصلوں  $لام، لام، لام$  کا وہی تفاعل ہے وغیرہ۔ تب

$ق = ق (لا، لا، لا، لا، لا) = ق \{ لا، طه (لا، لا، لا، لا) \} = ق (لا، لا، لا، لا، لا)$   
جہاں  $فہ (لا، لا، لا)$  کا ایک منطق تفاعل ہے۔ نیز چونکہ  $ق$  متشاکل تفاعل ہے اس لئے

$ق = ق (لا، لا، لا، لا، لا) = ق \{ لا، طه (لا، لا، لا، لا) \} = ق (لا، لا، لا، لا، لا)$  اور اسی طرح  $ق = ق (لام، لام، لام، لام، لام)$

پس  $ق = \frac{1}{۳} \{ ق (لا، لا، لا) + ق (لام، لام، لام) + ق (فہ، فہ، فہ) \}$ ۔ اسی طرح

$ق = \frac{1}{۳} \{ ق (لا، لا، لا) + ق (لام، لام، لام) + ق (فہ، فہ، فہ) \}$

اور  $ق$ ،  $ق$  کے لئے بھی متشاکل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اسلئے







عہ مساوات لا۔ ۱ = کی ایک خاص یعنی ابتدائی اصل ہے اور اس لئے دوسری اصلیں عہ<sup>۱</sup>، عہ<sup>۲</sup>، عہ<sup>۳</sup>، ...، عہ<sup>ن</sup> ایسے اور اگر م > ن تو

$$\text{عہ} + \text{عہ}^۱ + \text{عہ}^۲ + \dots + \text{عہ}^{(ن-۱)} = ۰$$

لا کی بجائے کوئی دوسری اصل لا<sub>۱</sub> = طہ (لا) (وج کرنے سے ہمیں ملتا ہے :-

$$\text{پہر (لا)} = \{ \text{طہ (لا)} + \text{عہ}^۱ \text{ طہ (لا)} + \text{عہ}^۲ \text{ طہ (لا)} + \dots + \text{عہ}^{(ن-۱)} \text{ طہ (لا)} \}$$

$$+ \text{عہ}^{(ن-۱)} \text{ طہ (لا)} + \dots + \text{عہ}^{(ن-۱)} \text{ طہ (لا)} + \text{عہ}^{(ن-۱)} \text{ طہ (لا)} =$$

$$\{ \text{عہ}^{(ن-۱)} \text{ طہ (لا)} + \text{عہ}^{(ن-۱)} \text{ طہ (لا)} + \dots + \text{عہ}^{(ن-۱)} \text{ طہ (لا)} + \text{عہ}^{(ن-۱)} \text{ طہ (لا)} \} =$$

$$= \text{پہر (لا)}$$

اس لئے پہر (لا) = پہر (لا) = ... = پہر (لا) =  $\frac{1}{n}$  پہر (لا) = ف (لا) کے

سروں اور عہ کے ایک منطوق صحیح تفاعل عہ کے -

ن ویں جذریں سے اور ر کو ۱، ۲، ...، ن-۱ کے مساوی رکھنے سے ہمیں ن مساواتیں ملتی ہیں جو سب کی سب ذیل کی شکل کی ہیں :-

$$\text{لا} + \text{عہ}^۱ \text{ طہ (لا)} + \text{عہ}^۲ \text{ طہ (لا)} + \dots + \text{عہ}^{(ن-۱)} \text{ طہ (لا)} = \text{عہ}^{(ن-۱)} \text{ طہ (لا)}$$

جہاں عہ<sup>۱</sup> کے ن ویں جذروں میں سے کوئی ایک ہے -

(299)

۱۔ کے لئے آخری مساوات کا سیدھی طرف والا رکھ کر

$$\lambda + \lambda + \lambda + \dots + \lambda = - (f) \text{ (لا) میں لا} - \text{کا سر} \text{ (لا)}$$

(لا کا سر) = ! ہو جاتا ہے۔ اگر ہم ان مساواتوں کی طرفیں کو جمع کریں اور یہ یاد رکھیں کہ

$$e + e + e + \dots + e = (n-1) \text{ م}$$

تو ہمیں  $n \lambda = (e) + (e) + \dots + (e) + 1$  حاصل ہوتا ہے۔

اگر ہم مساواتوں کو  $e + e + e + \dots + e = (n-1) \text{ م}$  سے ضرب دیں اور جمع کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$n \lambda = n \text{ ط (لا) } = ! + e + e + \dots + e + \dots + \dots$$

$\dots + e = (n-1) \text{ م (لا) } - \text{ان مساواتوں میں جذر (لا) کی}$

وہ قیمت جو  $(e)$  کے ساتھ لینی چاہئے  $(e) = \{ (e) \}$

سے حاصل ہوتی ہے جہاں ! ف (لا) کے سروں اور ع کا منطق تفاعل ہے۔ یہ اس لئے کہ

$$(e) = \frac{\lambda + e \text{ ط (لا) } + e \text{ ط (لا) } + \dots + e \text{ ط (لا) } + (e) \text{ ط (لا) }}{\lambda + e \text{ ط (لا) } + e \text{ ط (لا) } + \dots + e \text{ ط (لا) } + (e) \text{ ط (لا) }}$$

لیکن ہم اوپر دیکھ چکے ہیں کہ اگر جملہ

$$لا + عہ طہ (لا) + عہ طہ (لا) + \dots + عہ طہ (لا) = عہ طہ (لا) = سیر (لا)$$

میں لا کی بجائے لا + رکھا جائے تو نتیجہ عہ (ف-ن) سیر (لا) حاصل ہوتا ہے اسلئے

$$\text{چیر (لا +)} = \frac{\text{عہ (ف-ن) سیر (لا)}}{\text{عہ (ف-ن) سیر (لا)}} = \text{چیر (لا)}$$

$$\text{اسلئے چیر (لا) = چیر (لا) = چیر (لا) = \dots = چیر (لا)}$$

$$= \frac{1}{ن} \text{ چیر (لا)} = \frac{1}{ن}$$

ف (لا) کے سروں اور عہ کا ایک منطق تفاعل۔ پس ایک اصل لام + کے لئے عام جملہ

$$ن لام + = لا + ما + لا + ما + \dots + لا + ما + لا +$$

کے طور پر لکھا جاسکتا ہے جہاں ما = عہ (ع) جس کی صرف ن قیمتیں ہیں۔ پس مذکورہ بالا نمونہ کی آبل کی سادات جذروں کے ذریعہ حل ہو سکتی ہے۔

۲۴۴۔ آبل کی سادات ف (لا) = کو حل کرنا دوسرا طریقہ جبکہ سادات کی تمام اصلوں سے ایک گروہ بنے







اور اسلئے  $\frac{لا-۱}{لا-۱} =$  کی اصلیں عم، عم، عم، ...، ف-۱ ہیں  
(جلد اول دفعہ ۴۹)۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ ایک عدد صحیح  
اور ایسا دریافت کیا جاسکتا ہے کہ جب 'ا'، 'و'، '۲'، '۳'، ...، 'ن'۔۱  
کو ف سے تقسیم کیا جاتا ہے تو باقی '۱'، '۲'، ...، 'ف'۔۱ (کسی ترتیب  
میں) حاصل ہوتے ہیں اور 'ف'۔۱ کا باقی اکائی ہوتا ہے۔ اس لئے  
اصلوں کو عم، عم، عم، ...، عم، 'ا' کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے  
اور پھر طہ (لا)  $\equiv$  لا۱ لئے اور عم کی بجائے لا رکھنے سے اصلوں کو  
لا طہ (لا)، طہ (لا)، ...، طہ (لا) کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے  
جہاں طہ ۱۔ (لا) = لا۱ = لا۔۱

پس مساوات  $\frac{لا-۱}{لا-۱} =$  اہل کی اس نمونہ کی مساوات ہے  
جس کی تمام اصلیں ایک گروہ بناتی ہیں۔  
مذکورہ بالا مسئلہ کا (یعنی اس مسئلہ کا کہ ایک صحیح عدد اور  
موجود ہے) جو ثبوت ہم ذیل میں دیں گے اس میں تمام حروف  
اعداد صحیح کو تعبیر کرتے ہیں۔ ف کو مفرد عدد مان لیا گیا ہے۔ لا  
کے تمام تفاعل منطقی اور صحیح ہیں اور ان تفاعلوں کے سر بھی صحیح  
اعداد ہیں۔ لا کی سب سے بڑی قوت کا سرا کاٹی ہے۔ اور  
فا (لا)  $\equiv$  فہ (لا) میں علامت  $\equiv$  اس بات کو تعبیر کرتی ہے کہ  
جب فا (لا) اور فہ (لا) کو عدد ف سے تقسیم کیا جاتا ہے تو  
باقی وہی حاصل ہوتے ہیں۔ بالخصوص فا (لا)  $\equiv$  کا مطلب



یہ ہے کہ  $قا (لا)$  عدد  $ف$  سے ٹھیک ٹھیک تقسیم ہو جاتا ہے۔ یہاں  
 لا یقیناً ایک عدد صحیح ہے۔ ایسی مساوات نماؤں (quasi equations)  
 کو متطابقتات (Congruencies) کہا جاتا ہے۔  
 (۱) اگر  $قا (لا) > ف$  اور  $قا (لا) = ف$  کو چورا کرے تو  $لا$  کو  
 $قا (لا) =$  کی اصل نہیں ہیں۔ کوئی صحیح عدد  $(۱ + م ف)$  بھی  $قا (لا) =$   
 کو چورا کرے گا کیونکہ  $(۱ + م ف) = قا (لا)$  اور اسے  $قا (لا) = قا (۱ + م ف)$   
 لیکن اصطلاح  $قا (لا) =$  کی اصل صرف اس عدد صحیح تک محدود  
 ہے جو  $ف$  سے کم ہو۔  
 اب  $قا (لا) =$  کی اصلوں کی تعداد اس کے درجہ  $ف$   
 سے بڑی نہیں ہے۔ کیونکہ اگر  $لا$  کوئی اصل ہے تو  $قا (لا) =$   
 $= (لا - ۱) قا (لا) + ۱$  اور چونکہ  $قا (لا) = ۱$ ،  $۱ =$  اسے  
 $قا (لا) = (لا - ۱) قا (لا) + ۱$  اگر  $قا (لا) =$  کی دوسری اصل  
 $لا$  ہو تو  $قا (لا) = ۱$  ہونا چاہئے اور اس لئے اوپر کی طرح  
 $قا (لا) = (لا - ۱) قا (لا) + ۱$ ۔ اسی طرح عمل جاری رکھنے سے  
 ہم دیکھتے ہیں کہ اگر  $قا (لا) =$  کی  $n$  اصلیں  $لا - ۱, لا - ۲, لا - ۳, \dots, لا - n$  ہوں  
 تو  $قا (لا) = (لا - ۱) قا (لا - ۱) (لا - ۲) قا (لا - ۲) \dots (لا - n) قا (لا - n)$  اور اس لئے  
 $قا (لا) =$  کی کوئی اور اصل نہیں ہو سکتی کیونکہ  $لا$  کی کوئی قیمت  
 جو عدد  $ف$  سے کم ہو  $(لا - ۱) (لا - ۲) \dots (لا - n) =$  کو  
 دہرا نہیں کر سکتی۔



اسلئے پہلے (ن-۱) باقی ہمیشہ اس ترتیب میں واقع ہوتے ہیں لیکن  
(ج) کی رو سے  $\text{ا} \equiv \text{ا} \equiv \text{ا}$  اسلئے  $\text{ن} = \text{ف}$ ۔  $\text{ا} \equiv \text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  $\text{ا} \equiv \text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  
اگر  $\text{ن} = \text{ف}$ ۔ اسے کم ہوتوں،  $\text{ف}$ ۔ کا مقسم ہونا چاہئے کیونکہ  
اگر  $\text{ف} = ۱$ ۔  $\text{م} + \text{ر}$  جہاں  $\text{ر} > \text{ن}$  تو چونکہ  $\text{ا} \equiv \text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  $\text{ا} \equiv \text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  
لیکن  $\text{ا} \equiv \text{ا} \equiv \text{ا}$  کیونکہ  $\text{ا} \equiv \text{ا}$  اور اسلئے اگر  $\text{ا} \equiv \text{ل}$  تو چونکہ  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  
اسلئے  $\text{ل} = ۱$  اور اسلئے  $\text{ن}$  وہ کم سے کم صحیح عدد نہیں ہے جس کے  
لئے  $\text{ا} \equiv ۱$ ۔

اگر  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔ کی اصل ہو مگر  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  $\text{م} > \text{ن}$  کی  
اصل نہ ہو تو  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔ کی ابتدائی اصل کہتے ہیں اور یہ اصل  
ایسی ہے کہ اگر  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ،  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ،  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ،  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔ کو  $\text{ف}$  سے تقسیم کریں  
تو باقی سب ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور اکائی سے بھی مختلف ہیں  
پس مسئلہ جو ہم کو ثابت کرنا ہے یہ ہے کہ  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔ کی ابتدائی  
اصلیں موجود ہوتی ہیں۔

(ص)  $\text{ف}$ ۔  $\text{ا}$  کو اس کے مفرد اجزاء سے ضربی  $\text{ف} = ۱$ ۔  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔ میں  
بہ تحلیل کرو جہاں  $\text{ق}$ ،  $\text{ر}$ ،  $\text{س}$  مفرد عدد ہیں چونکہ  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  
اجزہ ضربی ہے اسلئے (ب) کی رو سے اس کی  $\text{ق}$  اصلیں موجود  
ہیں اور اگر اسکی اصلوں میں سے کوئی  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔ کو پورا کریں جہاں  
 $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔ تو اس استدلال سے جو (د) میں کیا گیا ہے کبھی  
بہا کا جزو ضربی ہوگا اور چونکہ  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔ اگر  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔  $\text{ا} \equiv \text{ا}$ ۔ اس لئے

ایسی تمام اصلیں لاق<sup>ل</sup>۔ ۱۔ کو بھی پورا کریں گی۔ چونکہ ق<sup>ل</sup>۔ ا<sup>ف</sup>۔ ۱۔ کا جزو ضربی ہے اسلئے لاق<sup>ل</sup>۔ ۱۔ ۱۔ کی ق<sup>ل</sup>۔ ۱۔ اصلیں ہیں اور اس لئے لاق<sup>ل</sup>۔ ۱۔ ۱۔ کی ق<sup>ل</sup>۔ ۱۔ اور صرف ق<sup>ل</sup>۔ ۱۔ اصلیں ایسی ہیں جو کمتر درجہ کی ثنائی تطابقتوں کی بھی اصلیں ہیں اور اس لئے لاق<sup>ل</sup>۔ ۱۔ ۱۔ کی ق<sup>ل</sup>۔ ق<sup>ل</sup>۔ ۱۔ ابتدائی اصلیں ہیں۔

ا<sup>ف</sup>۔ اگر لا<sup>م</sup>۔ ۱۔ کی ابتدائی اصل و اور لا<sup>م</sup>۔ ۱۔ کی ابتدائی اصل ب ہو اور اگر م<sup>ن</sup> ایک دوسرے کے لئے مفرد ہوں تو لا<sup>م</sup>۔ ۱۔ کی ابتدائی اصل و ب ہوگی۔

فرض کرو کہ م<sup>ن</sup> کم سے کم دو صحیح عدد ہے جس کے لئے (و ب) م<sup>ن</sup>۔ ۱۔ ۱۔ یعنی و ب م<sup>ن</sup>۔ ۱۔ ۱۔ اس لئے

و ب م<sup>ن</sup> م<sup>ن</sup>۔ ۱۔ لیکن و م<sup>ن</sup> ۱۔ اس لئے ب م<sup>ن</sup> ۱۔ اسلئے م<sup>ن</sup> م<sup>ن</sup> کا ایک ضعیف ہے۔ اور اس لئے م<sup>ن</sup> کا ایک ضعیف ہے۔ اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ م<sup>ن</sup> کا ایک ضعیف ہے۔ اس لئے م<sup>ن</sup> م<sup>ن</sup> کا ایک ضعیف ہے۔ لیکن (و ب) م<sup>ن</sup> ۱۔ اس لئے م<sup>ن</sup> م<sup>ن</sup> کا ایک ضعیف ہے اور اسلئے م<sup>ن</sup> = م<sup>ن</sup>۔

اب اگر لا<sup>م</sup>۔ ۱۔ کی ایک ابتدائی اصل و ہے جس سے متعلق



جلد اول صفحہ ۱۴۹ پر دی گئی ہے اور وہاں اصولوں کی جو ترتیب دی گئی ہے عدد صحیح ۳ لینے سے حاصل ہوتی ہے کیونکہ  $14 = 14$  کے لئے ۳، مساوات لا۔ ۱۔ کی ابتداء اصل ہے۔ پھر دفعہ ۲۴۲ کی طرح طہ (لا)  $\equiv$  لا لیکر اصولوں کے گروہ بنائے جاتے ہیں۔

۲۴۶۔ اگر ایک ناتحول پذیر مساوات کی ایک اصل ایک دوسری اصل کا منطق تفاعل ہو تو وہی مساوات آبل کی مساوات ہوگی :- اگر ن ویں درجہ کی مساوات

فقط (لا) = ناتحول پذیر ہے اور اگر ایک اصل لا، ایک دوسری اصل لا، کا منطق تفاعل طہ ہے یعنی اگر لا، = طہ (لا) تو تمام اصلیں اس طرح سے مربوط ہوں گی اور مساوات آبل کی مساوات ہوگی۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے ہم ابدال ما = طہ (لا) کے ذریعہ مساوات فا، (لا) = کو اسی درجہ کی مساوات فہ (ما) = میں متحول کرتے ہیں۔ چونکہ فہ (ما) = کی ایک اصل = لا، اس لئے اس مساوات کی تمام اصلیں وہی ہوتی چاہئیں جو مساوات فا، (لا) = کی ہیں اور دراصل فہ (ما) = کو فا (لا) = کے معادل ہونا چاہیے کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو فا (لا) اور فہ (لا) کا مقسوم علیہ اعظم دریافت کرنے پر فا، (لا) تحویل پذیر ہو جائیگا۔ پس معلوم ہوا کہ فہ (ما) = کی تمام اصلیں فا (لا) = کی بھی اصلیں ہیں اور اس لئے فقط (لا) کی ہر اصل لا، ایک دوسری اصل لا، سے مساوات لا، = طہ (لا) کے ذریعہ یگانہ طور پر مربوط ہے۔

تب لا، سے ابتدا کر کے تیس حاصل ہوتا ہے لا، = طہ (لا) پھر ہم لیتے ہیں



ستونوں سے بنے ہوئے صغیروں کی رقوم میں پھیلا یا جاسکتا ہے۔  
ظاہر ہے کہ طریق عمل جو یہاں اختیار کیا گیا ہے عام صورت میں  
بھی استعمال ہو سکتا ہے۔ ۷ لاحقوں میں سے تین تین کو ایک  
مرتبہ لیکر ان کا کوئی اجتماع لو اور اس اجتماع کو ترتیب وار ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷  
سے ملحق کرو اور بقیہ کو ترتیب وار ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ سے ملحق کرو۔

فرض کرو کہ اس طرح ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵  
اس رقم میں انقلابات کی تعداد اس بات پر مبنی ہے کہ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵  
ساتھ جو لاحقے ہیں وہ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵  
ہیں اور اس مثال میں انقلابات کی تعداد ۷ ہے۔ اب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵  
کے لاحقوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ کی مختلف ترتیبیں لو اور بقیہ کو ثابت رکھو۔ اس طرح  
جو مزید انقلابات کا اضافہ کسی رقم مثلاً ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ سے کیا  
میں ہوا ہے وہ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ کی ایک رقم فرض کرتے  
اس میں جو انقلابات ہوئے ہیں ان کی تعداد کے سادی ہے یعنی  
یہ تعداد ۲ ہے۔ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ کے ساتھ علامت (۱) رکھو تو  
ہم کو (۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵) کی ایک رقم ملتی ہے۔ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ کی ہر ایک  
ترتیب سے جو رقم پیدا ہوتی ہے اس کے ساتھ ہی عمل کرنے سے  
اور ان سب کو جمع کرنے سے ہم کو (۱) (۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵) (۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵) (۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵)  
حاصل ہوتا ہے۔ اب لاحقوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ کو ہر ممکنہ طریقہ پر ترتیب  
دینے اور (۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵) کو ثابت رکھنے پر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ کی جو رقمیں ملتی ہیں  
ان سے حاصل ہوتا ہے (۱) (۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵) (۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵) (۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵)۔





علامت کے ساتھ اور (۱۰۰) (۱۰۰) سے ضرب کھائی ہوئی حاصل ہوتی ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ  $\Delta = (۱۰۰) (۱۰۰) (۱۰۰) (۱۰۰) =$  عام صورت میں بھی ثبوت کے لئے متساویہ طریقہ استعمال کیا جاسکتا ہے صفحہ ۱۱۱ - اگر تو = اور تو = کی دو اصلیں سے بہ مشترک ہوں تو

$$\text{چونکہ } \frac{\text{جفا کا}}{\text{جفا کا}} = \frac{\text{جفا کا}}{\text{جفا کا}} \text{ اور } \frac{\text{جفا کا}}{\text{جفا کا}} = \frac{\text{جفا کا}}{\text{جفا کا}} \text{ اسلئے (ع۔) } \frac{\text{جفا کا}}{\text{جفا کا}} = \frac{\text{جفا کا}}{\text{جفا کا}}$$

$$\text{اسلئے } \frac{\text{جفا کا}}{\text{جفا کا}} = \frac{\text{جفا کا}}{\text{جفا کا}} \text{ اور اسلئے } \frac{\text{جفا کا}}{\text{جفا کا}} = \frac{\text{جفا کا}}{\text{جفا کا}} \text{ کیونکہ } \frac{\text{جفا کا}}{\text{جفا کا}} = \frac{\text{جفا کا}}{\text{جفا کا}}$$



## نوٹ ۱

### مقطعات

کوشی نے ان جملوں کو جو تیر ہویں باب کا موضوع ہیں۔  
 Determinants کا نام دیا تھا۔ یہ نام اس نے گاس کے تحریر و  
 سے اخذ کیا جس نے اسکواہن تفاعلوں کی بعض خاص جماعتوں کیلئے  
 یعنی ثنائی اور ثلاثی دو درجہ ششکوں کے میٹروں کے لئے استعمال  
 کیا تھا۔ اگرچہ لیٹ نیر نے ۱۷۹۷ء میں ان جملوں کی خصوصیت  
 کا مشاہدہ کر لیا تھا جو خطی مساداتوں کے حل سے پیدا ہوتے ہیں لیکن  
 اس مضمون میں کوئی مزید ترقی نہیں ہوئی تا آنکہ کرامیر (Cramer) کو  
 ششکوں میں متغیروں کی تحلیل کے سلسلہ میں ایسے تفاعلوں کا مطالعہ  
 کرنا پڑا۔ دفعہ ۱۲۸ میں علامتوں کا جو قاعدہ بیان ہوا ہے اسی نے  
 دریافت کیا تھا۔ اٹھارہویں صدی کے آخری حصہ میں بیرو  
 (Bezout) لاپلاس، ڈانڈرمانڈ، اور لگرائج کی مشقوں نے اس  
 مضمون میں مزید توسیع کی۔ انیسویں صدی کے ابتدائی زمانہ میں ریاضی  
 کی اس شاخ کی نشوونما گاس اور کوشی کے ہاتھوں ہوئی، قبل الذکر نے  
 علاوہ ان تحقیقاتوں کے جو دو درجہ ششکوں کے میٹروں سے متعلق ہیں دوسرے  
 اور تیسرے رتبہ کی مخصوص صورتوں میں یہ ثابت کیا کہ دو مقطعوں کا حاصل  
 خود ایک مقطع ہوتا ہے۔ کوشی نے سب سے اول اس مضمون پر ایک  
 باضابطہ کتاب لکھ کر دنیائے ریاضی پر ایک احسان کیا۔ متبادل تفاعلوں  
 پر اس نے ایک مقالہ (Journal de l'Ecole polytechnique) میں دو غلط  
 دہم میں شائع ہوا مقطعات پر بحث کرتے ہوئے وہ کہتا ہے کہ مقطعات مذکورہ

308)

بالا تفاق علوں کی ایک مخصوص جماعت ہے اور نیز ان سے متعلق کئی اہم کام مسئلے ثابت کرتا ہے۔ جیکوبی کے مضامین (جو Crelle کے جرنل میں نکلے) اور اس کے مقالوں نے (جو سلسلہ میں شائع ہوئے) ان جملوں کے مطالعہ کو بڑی تقویت پہنچائی۔ اس سے زیادہ قریب ہاتھیں جن علماء ریاضی نے اس مضمون کی توسیع اور اس میں اضافہ کیا ہے انہیں Cayley 'Joachimsthal' 'Hesse' 'Hermite' 'Brioschi' 'Sylvester' سے اور (Salmon) قابل ذکر ہیں۔ اب ریاضی کا کوئی 'نظری یا علمی شعبہ' ایسا نہیں ہے جس میں مقطعات کے استعمال سے بڑی مدد نہ ملتی ہو۔ ان کے استعمال سے معلومہ خواص کو دکھانے میں نہ صرف اختصار و نفاست پیدا ہوتی ہے بلکہ علم ریاضی میں نئے انکشافات بھی ہوتے ہیں۔ جدید تصنیفات میں جن سے طالب علم استفادہ کر سکتا ہے سب ذیل قابل ذکر ہیں:-

1- Spottiswoode's Elementary Theorems relating to determinants,

London, 1851,

2- Brioschi's La teoria dei Determinants., Pavia, 1854

3- Baltzer's Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig, 1864

4- Dostor's Elements de la Theorie des Determinants, Paris, 1877

5- Scott's Theory of Determinants, Cambridge, 1880

6- Salmon's Lessons Introductory to The Modern Higher Algebra, Dublin 1876

اس مضمون کی تاریخ (History) میں مزید معلومات حاصل

کرنے کے لئے ناظر کو Muir's Theory of Determinants in the

Historical order of its development, London, 1890)

کا مطالعہ کرنا چاہئے۔ سامن کی Higher Algebra میں بھی حواصل اسقاط

تبدیلیات، اہم تبدیلیات اور خطی استحالات پر اور نیز مقطعات پر

اجزائی تاریخی معلومات بہم پہنچائے گئے ہیں۔

## نوٹ (ب)

## مخلوط اشکال

(۵۹)

ہم یہاں اٹھارہویں باب کے ضمیمہ کے طور پر دو چار درجیوں  
 ۶ اور ۷ کے ہم رو تفاعلوں کی تعداد درج کرتے ہیں۔ اس مقصد  
 کے لئے (۱، ۲) پ فم پیر کی بجائے ترقیم (فہ، پیر) کا استعمال کرنا  
 موجب سہولت ہو گا جبکہ متغیروں کے درمیان امتیاز اٹھا دیا جائے۔  
 اس ترقیم کی رو سے سولہ ہم رو یہ ہیں (۶، ۷) پ، (۶، ۷) پ،  
 (۷، ۶) پ، (۷، ۶) پ جہاں پ کی قیتیں ۱، ۲، ۳، ۴ ہیں  
 یعنی بارہ ہم متغیر اور چار غیر متغیر، لیکن ان میں سے سلوٹرنے  
 (۶، ۶) پ، (۷، ۷) پ کو تخیل کیا ہے اور اس طرح صرف  
 دس غیر تابع ہم متغیر اس طریقہ سے حاصل ہوتے ہیں: تاہم  
 چار دو درجی ہم متغیر (گ، ۷) پ، (گ، ۶) پ، (گ، ۷) پ،  
 (گ، ۶) پ کو انہیں شامل کرنا ہو گا۔ پس اس نظام کے چودہ  
 خاص ہم متغیر ہیں (گارڈن) - (Math. Ann. II. 275.)



## نوٹ (ج)

### پانچ درجی اور اسکے ہم رو

(310) گکارڈن نے غیر تابع ہم روؤں کی تعداد تسلیس (۲۳) مقرر کی ہے جسکی فہرست یہ ہے:۔ پہلے چودہ یعنی چار غیر متغیر، چار خطی ہم متغیر، تین دو درجی ہم متغیر، اور تین کسی ہم متغیر جو دوسرے درجہ کے ہم متغیر ع اور تیسرے درجہ کے ہم متغیر جے کو ایک علیحدہ مخلوط نظام سمجھ کر دفعہ ۱۹۱ کے طریقہ پر اس نظام سے اخذ کئے گئے ہیں۔ دفعہ مذکورہ میں جو تعداد (یعنی پندرہ) یہ وہ تعداد ہے جو مخلوط نظام کی تحویل پذیر شکلوں کی ہے) حاصل ہوئی تھی اس ایک کم اس صورت میں واقع ہوتی ہے کیونکہ ع اور جے کا حاصل سا (ع جے) وہی ہے جو جے کا مینر ۵ (جے) ہے ان دونوں سے ایک ہی غیر متغیر 'بارہویں رتبہ' حاصل ہوتا ہے ان چودہ ہم روؤں کے علاوہ باقی نو کی تعریف حسب ذیل کی گئی ہے جس میں 'ک' جے کے معسوی کو تعبیر کرنے کے لئے استعمال ہوا ہے:۔

چار درجی ہم متغیر:۔ ع (ھ) = ق، جے (ع، ق)

پانچ درجی ہم متغیر:-  $e$  جے  $(e, c)$  جے  $(e, k)$

چھ درجی ہم متغیر:-  $h$  جے  $(e, h)$

سات درجی ہم متغیر:- جے  $(h, e)$

نو درجی ہم متغیر:- جے  $(e, h)$

مذکورہ بالا نتائج جدول ذیل میں اکٹھے کئے گئے ہیں جن میں پ

سے مراد متغیروں کا درجہ ہے،  $h$  سے پانچ درجی کے سروں کا رتبہ اور  $n$  سے ہر درجہ کے ہمرووں کی تعداد۔

پ	h				n
۰	۴	۸	۱۲	۱۸	۴
۱	۵	۷	۱۱	۱۳	۴
۲	۲	۶	۸		۳
۳	۳	۵	۹		۳
۴	۴	۶			۲
۵	۱	۳	۷		۳
۶	۲	۴			۲
۷	۵				۱
۹	۳				۱

غیر متغیروں کی ان تعریفات کو جو کلیشہ اور گارڈن نے دی ہیں اور جو مساوات ذیل سے واضح ہیں (دیکھو دفعہ ۱۹۰) اختیار کرنے سے گارڈن نے پانچ درجی کے چار غیر متغیروں کے درمیان حسب ذیل ربط قائم کیا ہے:-

(31)



- جے (ع'ک) = ع'ک - ع'ک + ع'ک + ع'ک

نیز  $\frac{1}{2}$  ع'ف (جے) = ل' = ل' + ل' + ل' + ل'

اب ع'ک میں اور جے (ع'ک) میں لا اور ما کی بجائے  
ل' اور - ل' درج کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

- ع' = ف (ع' ع' ع' ع')

کیونکہ سا (ع'ل) = ع'۱۲ - ع'۱۶ ع'۱۶ ع'۱۶

سا (ک'ل) = ع' - ع'۱۶ ع'۱۶

اس طرح ع'۱۶ معین ہو جاتا ہے اور اسکا مربع دوسرے

غیر متغیروں کی رقوم میں جو معوج نہیں ہیں بیان ہو جاتا ہے۔

## نوٹ (د)

چہہ درجی اور اسکے ہم رو

چہہ درجی کی چھبیس شکلوں میں سے پہلی سولہ ل اور ع کو ایک مخلوط نظام کے طور پر لینے سے حاصل ہوتی ہیں (صفحہ ۲۱)

اس طریقہ سے تمام غیر متغیر دو درجی ہم متغیر اور چار درجی ہم متغیر حاصل ہوتے ہیں۔ بالعموم چار درجی اور دو درجی کے مخلوط نظام میں اٹھارہ شکلیں ہوتی ہیں، لیکن اس خاص صورت میں سروں کی نوعیت کی وجہ سے غیر متغیر د جو چہہ درجی کا غیر متغیر

ع ہے غیر متغیروں ع، ع، ع کی رقوم میں شکل ع = ف ع + ق ع کے ذریعہ بیان ہو سکتا ہے نیز ع کا چہہ درجی ہم متغیر ان شکلوں میں تحویل ہو سکتا ہے جو تعداد ذیل میں واقع ہوتی ہیں یہ معلوم رہے کہ یہ تمام اشکال متغیروں میں ہفت ہیں کیونکہ ن = ۲ ک چہہ درجی کے لئے ہفت ہے۔  
مسب ذیل فہرست سے ہم متغیروں کی کل تعداد معلوم ہوگی :-

دو درجی ہم متغیر :- ل = ع (۶) کھ = ل (۶) ن = ع (۶) ع

جے (ل'م) بے (ل'ن) بے (م'ن)

چار درجی ہم متغیر:- ع'ھ (ع) بے (ع'ل) بے (ع'م)

جے (ع'ن)

چھ درجی ہم متغیر:- ع'ے بے (ع'ل) بے (ع'م) بے (ع'پ)

آٹھ درجی ہم متغیر:- ھ'ے بے (ع'م) بے (ھ'ل)

دس درجی ہم متغیر:- جے (ع'ھ)

بارہ درجی ہم متغیر:- گ

(312) ان نتائج کو جدول ذیل میں اکٹھا کیا گیا ہے جہیں پ' ہم رو کا

درجہ ہے ھ سروں کا رتبہ اور ن ہر قسم کے ہم رووں کی تعداد:-

پ	ھ						ن
۰	۲	۴	۶	۱۰	۱۵	۵	
۲	۳	۵	۷	۸	۱۰	۶	
۴	۲	۴	۵	۷	۹	۵	
۶	۱	۳	۴	۶	۶	۵	
۸	۲	۳	۵			۳	
۱۰	۴					۱	
۱۲	۳					۱	

ع' اور ل' کے مخلوط نظام کا معیج غیر متغیر (دفعہ ۲۱۷)

چہ درجی کا معوج غیر متغیر  $ع$  ہونے کی وجہ سے اس کا مربع اسی طرح چہ درجی کے غیر متغیروں (جن کا درجہ جفت ہے) کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔

یہ امر دیکھنے کے قابل ہے کہ متغیروں میں چھٹے درجہ کے اور سروں میں چھٹے رتبہ کے دو ہم متغیر ہیں، یہ پہلی مثال ہے جس میں ثنائی نظام کے دو غیر تحویل پذیر ہم غیر متغیر ہیں جن کا رتبہ اور وزن ایک ہی ہے۔ یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر دو درجی ہم متغیروں میں سے کسی تین کی ثنائی شکل کو حوالہ کے خطوط کے طور پر لیا جائے تو چہ درجی ایک کعبی اور مخروطی کے مخلوط نظام سے اس طرح تعبیر ہوگا کہ دونوں متغیروں کی مساوات کا ہر ایک سرچہ درجی کا ایک غیر متغیر ہوگا۔

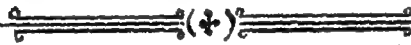




# اشاریہ

## مساواتوں کا نظریہ جلد دوم

(اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے)



ابدالات، تعریف، ۳۹۸

متماثل، ۳۹۹

دائری، ۳۹۹

ماصل ضرب اور قوتیں، ۴۰۲

رتبہ، ۴۰۳

انتقالات کے ماصل ضرب کے طور پر بیان کرنا، ۴۰۴

منتظم، ۴۰۸

متشابه، ۴۱۰

تبادله پذیر، ۴۱۰

مزدوج، ۴۱۱

جبری مساواتوں پر استعمال، ۴۶۵

آبل کی مساواتیں، ۴۸۴

آبل، مساواتوں کے حل پر بنیادی مسئلے، ۴۸۳، ۴۸۵

ثبوت کہ جو تھے درجہ سے اعلیٰ مساوات حل پذیر نہیں، ۴۸۵

اجتماعی، ۴۶۲

آراستے، مربع، ۳

مستطیل، ۵۲

آرنہولڈ، شنائی، تیسرے درجی کے لئے ترقیم، ۲۱۳

استعمال، خطی، ہم متغیروں پر اطلاق، ۱۹۱

متعلقہ مسئلہ، ۲۷۵

چرن ہاؤزن کا، ۲۷۹

ہندسی، ۳۵۴

شنائی اشکال کا ثلاثی اشکال میں، ۳۵۴

اسٹرم، اس کے تفاعلوں کے فائز، ۳۰۱

اس کے باقیوں کے لیے سلوسٹرگی شکلیں، ۳۰۰

اسقاط، ۱۱۲

متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ، ۱۱۴

یولر کا طریقہ، ۱۱۸

سلوسٹر کا طریقہ، ۱۲۰

بیرو کا طریقہ، ۱۲۲

دیگر طریقے، ۱۲۰

اصلیں، دو مساواتوں میں مشترک، ۱۳۶

ایلیٹ، ۱۲۸

بال، چار درجی کے چھ درجی ہم متغیر کے دو درجی اجزائے ضربی پر، ۲۳۳

برن ہولڈ، ۴۸۶

بیرو کا اسقاط کا طریقہ، ۱۲۲

بین تحلیل طریقہ اسقاط کا، ۱۲۰

پانچ رقی، سمتی شکل میں تحویل، ۲۹۰

تین یا پانچوں قوتوں کے مجموعہ میں تحویل، ۳۱۱

لگرنج کی بحث اسیر، ۲۶۴



اس کے ہم روؤں کی جدول '۵۱۶  
 تفاعل ' کبھی کے فرقوں کے '۱۵۲  
 چار درجہ کے فرقوں کے '۱۵۵  
 ثنائی شکلیں ' ثلاثی اشکال میں تحویل شدہ '۳۵۴  
 جبری حل ' مساواتوں کا '۲۶۵  
 حل پذیر مساواتوں کی اصولوں کی شکل '۴۶۹  
 عام مساوات حل پذیر نہیں '۴۸۵  
 جمع ' مقطعات کی '۳۴  
 جیکوینی ' مسئلہ '۲۸  
 جیکوینی ' تعریف '۲۱۰  
 چار درجہ ' ہم متغیر اور غیر متغیر '۲۳۱  
 چھ درجہ کے دو درجہ اجزائے ضربی میں بیان شدہ '۲۳۵  
 گنی تکمیل '۲۳۸  
 کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں کی تعداد '۲۴۵  
 چرن ہاوزن کے استحالة سے تحویل شدہ '۲۸۳  
 دو کا باہمی استحالة '۳۱۴  
 چرن ہاوزن کا استحالة '۲۴۹  
 کبھی یہ طرقات '۲۸۱  
 چار درجہ پر '۲۸۳  
 کبھی کا ثنائی شکل میں '۲۸۵  
 چار درجہ کا ثلاثی شکل میں '۲۸۶  
 پانچ درجہ کا ثلاثی شکل میں '۲۹۰  
 چھ درجہ ہم متغیر ' چار درجہ کا '۲۳۳  
 اس کے صدر ہم رو '۳۸۰  
 اس کے ہم روؤں کی جدول '۵۱۹

- حاصل اسقاط، دو مساواتوں کا، ۱۱۳  
 خارج قیمت، ایک کثیر رقمی کو دوسرے سے تقسیم کرنے پر، ۱۰۰  
 سروں کی شکلیں جب جفت درجہ کے کثیر رقمی کو  
 دو درجی سے تقسیم کیا جائے، ۱۰۱  
 خطی مساواتیں حل شدہ، ۵۸  
 متجانس، ۶۲  
 دو قیمتیں تفاعلات، ۲۴۱  
 رابرٹس، ہم متغیر کے مانڈپر، ۱۸۱  
 ہم متغیروں کے حاصل ضربوں پر، ۲۲۰  
 کثیر رقمی مسئلہ، ۲۲۰  
 راوتھ، مقطعات میں مثالیں، ۱۰۵  
 رسل، ہم متغیروں پر مثالیں، ۳۵۰، ۳۵۱  
 ساسن، اس کے ہائر الجبرا کا حوالہ، ۱۰۴، ۲۱۵، ۵۱۲  
 سلوسٹر، اسقاط کا طریقہ، ۱۲۰  
 حوالہ، ۲۵۴  
 اسپرم کے باقیوں کی شکلیں، ۳۰۷  
 پانچ درجی کی تحویل تین پانچویں قوتوں میں، ۳۱۱  
 سپرٹ، اس کے الجبرا کا حوالہ، ۲۹۱، ۴۸۶  
 صغیر مقطعات، ۱۷  
 ضد متغیرات، ۳۲۹  
 ضرب، مقطعات کی، ۴۴، ۵۰۹  
 طریقہ، اقل مربعوں کا، ۱۱۰  
 طاسی مربع، ۳۹  
 علامت کی بین رقموں کی، چرن ہاوزن کے استحالة سے، ۲۸۷  
 غیر متغیر، تعریفات، ۱۷۹، ۱۹۳

- غیر متغیر، ساخت '۱۸۰  
 چار درجہ کے '۱۸۲، '۲۲۳  
 معوج '۱۸۳  
 خواص '۱۸۵  
 متکونین کے طریقے '۲۰۴  
 کعبی کے '۲۳۰  
 شکل ک ۶-۵ کے '۲۴۰  
 مطلق '۳۱۸  
 قائم استمالہ '۳۲۸  
 کثیر رقمی، ثنائی '۱۷۹  
 کثیر قیمت تفاعل '۴۱۲  
 ان کی فرد وجہ قیمتیں '۴۱۶  
 متعلقہ مسئلہ '۴۲۴  
 جن کی تیسری قوت دو قیمتیں ہے '۴۴۷  
 کریمیر '۵۱۲  
 کعبی، چرن ہاؤزن کے طریقہ سے تحویل شدہ '۲۸۱  
 کلبش، حوالہ '۲۱۵، '۲۵۴  
 ثنائی کثیر درجہ پر اس کی بحث '۲۱۳  
 کوشی، مقطعات پر '۵۱۱  
 کیجوری '۴۸۶  
 کیلے، غیر متغیر اور ہم متغیر بنانے کا طریقہ '۲۱۲  
 کعبی کا حل '۲۲۹  
 چار درجہ کا حل '۲۳۸  
 چرن ہاؤزن استمالہ کے نتیجے '۲۸۱  
 گارڈن '۲۵۴

گارڈن ، نیم غیر متغیر محدود ، ۳۲۲  
 دو پیار درجیوں کے ہم متغیر ، ۵۱۳  
 کثیر رخی کے ہم رو ، ۵۱۸  
 گاس ، ۵۰۹  
 گروہ ، تعریف ، ۴۱۲  
 رتبہ اور درجہ ، ۴۱۲  
 متشاکل ، ۴۱۴  
 تحت گروہ ، ۴۱۴  
 متبادلہ ، ۴۱۴  
 متبادلہ کا رتبہ ، ۴۱۶  
 مزدوج ، ۴۱۶  
 متعلقہ تفاعلات کی ساخت ، ۴۱۶ ، ۴۲۹  
 غیر متغیر تحت گروہ ، ۴۲۶  
 ایک ہی گروہ کے دو تفاعلوں سے متعلق مسئلہ ، ۴۳۳  
 توسیع شدہ مسئلہ ، ۴۳۵  
 مساوات کا ، ۴۴۸  
 اس کے خواص ، ۴۵۰ تا ۴۵۷  
 متعدی ، ۴۵۷  
 گیناؤ تفاعل ، ۴۲۹  
 کسی منطق تفاعل کو اس کے ذریعہ بیان کرنا ، ۴۳۵  
 متغیروں کو اس کے ذریعہ بیان کرنا ، ۴۳۶  
 محلیل ، ۴۴۸  
 لاپلاس ، مقطع کا پھیلاؤ ، ۲۵ ، ۵۰۰  
 لگرائج ، کثیر رخی کی تحویل پر ، ۲۶۴  
 ماخذ ، ہم متغیروں کا ، ۱۸۱

- متبادلات، ۹۵، ۱۷۶  
 متبادل تفاعل، ۴۱۴  
 مسئلہ متعلقہ، ۴۴۲  
 متجانس، خطی مساواتیں، ۶۲  
 چار درجی کو مربعوں کے مجموعہ کے طور پر بیان کرنا، ۲۸۶  
 متشاكل تفاعل، اسقاط پر اطلاق، ۱۱۴  
 دو مساواتوں کی اصولوں کے، ۱۴۷  
 متکافی مقطعات، ۶۴  
 خطی استحاله، ۳۲۶  
 مجتمع (یا مخلوط) شکلیں، ۲۵۴  
 دو دو درجی، ۲۵۵  
 دو دو درجی اور کعبی، ۲۵۷  
 دو کعبی، ۲۵۹  
 نوٹ، ۵۱۳  
 مربع، اقل، ۱۱۰  
 مساواتیں، خطی، اکامل، ۵۸  
 خطی متجانس، ۶۲  
 مستخرجات، ۲۰۶  
 مستدیرات، ۹۷  
 مستطیلی آراستہ، ۵۲  
 مسلسلات، ۹۸  
 مطلق غیر متغیر، ۳۱۸  
 معوج غیر متغیر، ۱۸۳  
 معوج متشاكل مقطعات، ۷۱  
 معوج مقطعات، ۷۱

- مقطعات، تعریفات، ۱  
متعلقہ مسائل، ۱۰ تا ۴۵  
صغیر، ۱  
کا پھیلاؤ، ۱۸، ۲۵، ۲۹، ۳۲  
کی جمع، ۳۴  
کی ضرب، ۴۴، ۵۰۹  
معووج اور معوج متشاکل، ۷۱  
متشاکل، ۶۷  
متکافی، ۶۴  
متفرق متالیں، ۸۰ تا ۱۱۱  
نوٹ ان کی تاریخ پر، ۵۰۹  
مقیاس، خطی استحالہ، ۱۹۳  
ممیز، ۱۳۲  
منطق (علاقہ) احاطہ، ۴۶۸  
نیم غیر متغیر، تعریف، ۱۵۷  
عامل عطف کے ذریعہ محسوب کرنا، ۱۶۰  
ان کی تعیین، ۱۶۱  
کسب کا مسئلہ، ۱۶۸  
غیر متغیروں کے ساتھ مقابلہ، ۲۰۰  
ان کی تعداد، ۳۲۱  
نیم ہم متغیر، تعریف، ۱۵۷  
عامل عطف کے ذریعہ ساخت، ۱۵۹  
اصلوں سے متعلقہ مسئلہ، ۱۹۰  
ہم متغیروں سے فرق، ۲۰۰  
وانٹنرل، ۴۸۶

ویرنگ 'قوتوں کے مجموعوں کے لیے جملے' ۱۲۵  
 ہر مائٹ 'مسئلہ جو اضلوں کی انتہاؤں سے متعلق ہے' ۲۹۷  
 اس کا قانون تنکافیت '۳۲۳

ہم استحالہ 'تقریف' ۲۰۶  
 ہم متغیرات 'تقریفات' ۱۷۹، ۱۹۳

ان کی ساخت '۱۸۰

ان کے خواص '۱۸۳

عامل عطف کے ذریعہ ان کی ساخت '۱۸۷

مسئلہ متعلقہ '۱۹۰

دوہرے خطی استحالہ کا اطلاق '۱۹۱

خطی استحالہ سے ماخوذ خواص '۱۹۶

ان کی ساخت سے متعلق مسائل '۲۰۱

تقریبی علامتوں کے ذریعہ ان کا حصول '۲۱۰

کعبی '۲۲۵

ان کی تعداد '۲۳۰

چھ درجی کے اجزائے ضربی '۲۲۹

چار درجی کے '۲۳۱

چار درجی کی صورت میں ان کی تعداد '۲۴۵

خاص '۲۵۴

حیسوی، کعبی کا '۱۸۲، ۱۸۸، ۲۲۵

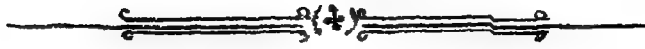
چار درجی کا '۱۸۳، ۲۳۱

اس کی عام شکل '۲۰۷

چار درجی کا جس کو چھ درجی ہم متغیر کے اجزائے ضربی کی رقوم میں

بیان کیا گیا ہو '۲۳۵

یولر، اسقاط کا طریقہ، ۱۱۸  
یگا: ثلاثی شکل، ۳۶۸ تا ۳۷۱





۷۸۶  
۹۲

# اصطلاحات

## مساد اتوں کا نظریہ جلد دوم

Abelian equations	آبل کی مساواتیں
Alternants	متبادلات
Alternate group	متبادلہ گروہ
Alternating functions	متبادل تفاعل
Associative law	استلانی کلیہ
Auxiliary functions	امدادی تفاعل
Binary	ثنائی
Binomial	ثنائی دو رقمی
Canonizant	قانونیہ
Circulants	مستدیرات
Circular substitution	دائری ابدال
Co-factor	ہم جزو ضربی
Column	ستون
Combinant	اجتماعیہ
Combined forms	مجتمع (مخلوط) شکلیں
Concomitant	ہم رد

Conjugate group	مزدوج گروہ
Constituents	اجزائے ترکیبی
Continuants	مسللات
Contragredient	ضد استحالہ ..
Contravariant	ضد متغیر
Covariant	ہم متغیر
Cycle	دور یہ
Determinant	مقطع
Development of a determinant	مقطع کا پھیلاؤ
Dialytic method	بین تحلیل طریقہ۔
Difference-product	فرقی حاصل ضرب
Discriminant	ممیز۔
Domain	علاقہ، احاطہ
Elements	عناصر۔
Eliminant	ماصل اسقاط
Elimination	اسقاط
Emanants	ستخرجات
Equianharmonic	ساوی غیر موسیقی
First minor	پہلا صغیر
Galois function	گیا لو اتفاعل
Group	گروہ
Hessian	ہیسوی
Homologous	ہم وصف
Homology	ہم وصفیت
Invariant	غیر متغیر

Invariant sub-group	غیر متغیر تحت گروہ
Inversion	انقلاب
Jacobian	جکوبی
Leading constituents	فائق یا صدر عناصر
Leading term	فائق یا صدر رقم
Lemma	تمہیدیہ
Magic-square	طلسمی مربع
Method of least squares	اقل مربعوں کا طریقہ
Minor determinant	صغیر مقطع
Modulus of Transformation	استعمال کا مقياس
Multinomial Theorem	کثیر رقمی مسئلہ
Multiple-valued function	کثیر قیمتی تفاعل
Operator, D	عامل عطف
Order	رتبہ
Orthogonal Transformation	قائم استعمال
Partial differential coefficients	جزوی تفرقی سر
Partial fractions	جزوی کسور
Pencil of lines	خطوط کی پینل
Polynomial	کثیر رقمی
Principal term	صدر قسم
Quintuple factor	پچھراہ جزو ضربی
Rational domain	منطق اطاقہ (علاقہ)
Reciprocal determinant	متکافی مقطع
Reciprocity	متکافیت
Rectangular array	مستطیلی آراستہ

Resolvent	محصل
Resultant	محاصل استقاط
Row	صف
Semicovariant	نیم ہم متغیہ
Seminvariant	نیم غیر متغیہ
Sextic	چھ درجی
Similar substitution	مقتضابہ ابدال
Skew invariant	معووج غیر متغیہ
Skew determinant	معووج مقطع
Skew-symmetric determinant	معووج متشاکل مقطع
Source	ماخذ
Sub-group	تحت گروہ
Substitution	ابدال
Symmetric determinant	متشاکل مقطع
Symmetric function	متشاکل تفاصل
Symmetric group	متشاکل گروہ
Ternary	ثلاثی
Transitive group	متعدی گروہ
Transposition	انتقال
Trinomial form	سہ رقمی شکل
Weight	وزن
Zero-axial determinant	صفر محوری مقطع

# ترقیم

## مسائلوں کا نظریہ جلد اول و جلد دوم

$$\begin{array}{l}
 f(x), \phi(x), F(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \psi(x), X(x), \text{ etc.} \\
 f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x) \\
 \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n} \\
 \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}
 \end{array}$$

$$D = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + 2 \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + 3 \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} + \dots + n \alpha_{n-1} \frac{\partial}{\partial \alpha_n}$$

$$+ 3 \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} + \dots + n \alpha_{n-1} \frac{\partial}{\partial \alpha_n}$$

Polynomials:

$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$$

$$\dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$$

$$x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n$$

$$\dots + b_{n-1} x + b_n$$

$$\alpha_0 x^n + n \alpha_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \alpha_2 x^{n-2} + \dots + \alpha_n$$

$$+ \dots + \alpha_n$$

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \dots + A_{n-1} y + A_n$$

$$+ \dots + A_n$$

Cubic:

$$\alpha_0 x^3 + 3 \alpha_1 x^2 + 3 \alpha_2 x + \alpha_3 = 0$$

$$x^3 + f x^2 + g x + r = 0$$

$$\alpha x^3 + 3 b x^2 + 3 c x + d = 0$$

$$\alpha_0 y^3 + 3 A_1 y^2 + 3 A_2 y + A_3 = 0$$

کعبی:

$$\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2 = H.$$

$$'H \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_0 & \alpha_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_1 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_0 \alpha_3 - 3 \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 + 2 \alpha_1^3 = G.$$

$$'G \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

$$z^3 + 3Hz + G = 0.$$

$$'G = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

$$z = \sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g}$$

$$y = \sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g}$$

$$\alpha_0^2 \alpha_3^2 - 6 \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + 4 \alpha_1^3 \alpha_3 =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2$$

$$- 3 \alpha_1^2 \alpha_2^2 = \Delta.$$

$$' \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2$$

Quartic:

چار درجی:

$$\alpha_0 x^4 + 4 \alpha_1 x^3 + 6 \alpha_2 x^2$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2$$

$$+ 4 \alpha_3 x + \alpha_4 = 0.$$

$$' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2$$

$$x^4 + f x^3 + g x^2$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2$$

$$+ 4 x + 5 = 0.$$

$$' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2$$

$$\alpha x^4 + 4 b x^3 + 6 x^2$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2$$

$$+ 4 d x + 5 = 0.$$

$$' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2$$

$$\alpha_0 \alpha_4 - 4 \alpha_1 \alpha_3 + 3 \alpha_2^2 = I$$

$$'I \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2$$

$$\alpha_0 \alpha_2 \alpha_4 + 2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_0 \alpha_3^2$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2$$

$$- \alpha_1^2 \alpha_4 - \alpha_2^3 = J.$$

$$'J \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2$$

$$z^4 + 6Hz^2 + 4Gz$$

یٰ + ۶ھ یٰ + ۴گ ی

$$+ a_0^2 I - 3H^2 = 0$$

۱ + ۳ھ = ۰

$$z = \sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h} \quad , \quad \sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h} = 0$$

$x, y, z$

لا، ما، ی

$X, Y, Z$

لا، ما، ی

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$

عہ، پ، چ، ض

$p, q, r, s, t$

پ یا ف، ق، ر، س، ت

$P, Q, R, S, T$

پ یا ف، ق، ر، س، ت

$h, k$

ھ، ک

$i, \omega, \omega^2$

ا، س، سہ

$l, m, n$

ل، م، ن

$L, M, N$

ل، م، ن

$\lambda, \mu, \nu$

لہ، مہ، نہ

$u, v, w$

ع، و، ط

$U, V, W$

ع، و، ط

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

عم، عم، عم، ...، عین

$\phi, \theta, \psi, \dots$

ط، ط، ط، ...، طہ

$\Sigma, \Pi, <, >$

'<' '>' '\Pi' '\Sigma'

$Q$  (Quotient.)

ق (خارج قسمت)

$R$  (Remainder.)

ر، ب (باقی)

$H_x, G_x$

ھ، گ



$S_m, P_m$

س، پ، م

$\nabla, \Delta$

$\Delta, \nabla$

$\varepsilon, \sigma$

صہ، شہ

$\alpha$

صہ

$\phi$

مف

$\frac{\partial u}{\partial y}$

جفء  
جفما

$\phi, \psi, \theta$

فہ، پ، طہ

$z = x + iy$  (Complex variable)  $y = \text{لا} + x$  ما (ملف متغیر)

mod. (modulus.)

مق (مقیاس)

am (amplitude.)

سعت

$a + ib$

ا + ب

$= \mu (\cos a + i \sin a)$   $=$  مہ (مجموعہ خ جب عہ)

$S_p = \sum a^p = a_1^p + a_2^p + \dots$

س =  $\sum$  عہ = ف  
ف

$\dots + a_n^p$

ف  
ف  
عہ +  $\dots$  + عہ

$U = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots$

$\dots + \text{لا}^{1-m} + \text{لا}^m = \text{ع}$

$\dots + a_0 = 0$

$\dots + \text{لا} = 0$

$V = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots$

$\dots + \text{لا}^{1-n} + \text{لا}^n = \text{و}$

$\dots + b_0 = 0$

$\dots + \text{ب} = 0$

$$\pm R = a_0^m b_0^n \prod (\alpha_p - \beta_q) \quad (\text{عین - جہتی})$$

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; x, y)^n. (l_1, l_2, \dots, l_n) (l_1, l_2, \dots, l_n)$$

Determinants: مقطعات:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} l_1 & b_1 & c_1 \\ l_2 & b_2 & c_2 \\ l_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} l_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ l_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix}$$

$$(a_1, b_2, c_3, \dots, l_n) \quad (l_1, b_2, c_3, \dots, l_n)$$

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \dots l_n \quad \Sigma \pm l_1 b_2 c_3 \dots l_n$$

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots \quad l_1 l_2 + l_3 l_4 + \dots$$

$$a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + \dots \quad l_1 l_2 + l_3 l_4 + \dots$$

$$A_1 = \Sigma \pm b_2 c_3 \dots l_n = \begin{vmatrix} b_2 & c_3 & \dots & l_2 \\ b_3 & c_4 & \dots & l_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix} = \Delta_{a_1}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \dots & \text{ل}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \dots & \text{ل}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{ب}_n & \text{ج}_n & \dots & \text{ل}_n \end{vmatrix} = \pm \sum \dots$$

$$A_2 = -\Delta_{a_2}, A_3 = \Delta_{a_3}, \dots \quad \Delta_{a_1} = \dots, \Delta_{a_n} = \dots$$

$$\left. \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \end{matrix} \right\}$$

$$\left. \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{ب}_1 \\ \text{ب}_2 \\ \text{ب}_3 \\ \text{ب}_4 \end{matrix} \right\}$$

Group

گروہ :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_a & x_b & x_c & \dots & x_d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{لا}_1 & \text{لا}_2 & \text{لا}_3 & \dots & \text{لا}_n \\ \text{لا}_a & \text{لا}_b & \text{لا}_c & \dots & \text{لا}_d \end{pmatrix}$$

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_j$$

$$\text{ج}_1, \text{ج}_2, \text{ج}_3, \dots, \text{ج}_j$$







